Chapitre 6 : Continuité sur un intervalle

(1 cours)

1 Contenu du cours

1.1 Propriétés

Théorème des valeurs intermédiaires démontré par bornes supérieure
Image d'un intervalle est un intervalle
Image d'un segment fermé est un segment fermé

1.2 Fonctions monotones continues

continuité de la fonction réciproque
limites

2 Exercices

2.1 Continuité

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. L'objet de cet exercice est de montrer la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, \exists x \in [0,1],\ f(x + \frac{1}{n}) = f(x).$$

Pour cela, pour $n \in \mathbb{N}_*$ donné, on définit $g : [0, 1 - \frac{1}{n}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.
i) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$.
ii) En déduire qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ et $x_1 \in [0,1]$ tels que $g(x_0) \geq 0$ et $g(x_1) \leq 0$.
iii) Conclure.

2.2 Maximum des fonctions continues

: Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Montrer que f atteint son maximum sur $\mathbb{R}^+$, c'est à dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que
$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq f(c)$.

2.3 Questions de cours

i) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Ecrire "avec des epsilon" la signification de $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$.
ii) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Ecrire "avec des epsilon" la signification de $\lim_n u_n = +\infty$.
iii) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
iv) Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction. Donner des conditions sur f permettant d'affirmer que la fonction réciproque de f existe, soit définie de J dans I, et soit continue et dérivable. Donner alors l'expression de $(f^{-1})'(x)$, pour tout $x \in J$.

3 Correction d'exercices

Correction de l'exercice 2.1

i) On a, par définition de la fonction g, $g(0) = f(\frac{1}{n}) - f(0)$, et plus généralement pour tout $k = 0, \ldots, n-1$, $g(\frac{k}{n}) = f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = f(\frac{1}{n}) - f(0) + f(\frac{2}{n}) - f(\frac{1}{n}) + \ldots + f(\frac{n-1+1}{n}) - f(\frac{n-1}{n}).$$

Les termes s'éliminent donc 2 à 2, et l'on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = f(1) - f(0) = 0,$$

par hypothèse sur f.
ii) Si l'on a $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $g(\frac{k}{n}) = 0$, alors on peut prendre $x_0 = x_1 = 0$. Dans le cas contraire, il existe $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que $g(\frac{k}{n}) \neq 0$. Supposons que $g(\frac{k}{n}) > 0$. Si l'on avait $\forall k' \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $g(\frac{k'}{n}) \geq 0$, alors on aurait $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) > 0$, ce qui est impossible. Donc il existe $k' \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que $g(\frac{k'}{n}) < 0$. On pose alors $x_0 = \frac{k}{n}$ et $x_1 = \frac{k'}{n}$. Le cas $g(\frac{k}{n}) < 0$ se traite de même.
iii) On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g pour la valeur $0 \in [g(x_1), g(x_0)]$. Il existe donc $x \in [\min(x_0, x_1), \max(x_0, x_1)]$ tel que $g(x) = 0$, donc $x \in [0, 1]$ tel que $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

Correction de l'exercice 2.2

Si f est la fonction constante 0, alors la propriété est vraie pour n'importe quel $c \in \mathbb{R}^+$. Supposons qu'il existe $d \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(d) > 0$. Puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in [A, +\infty[$, $f(x) \leq \frac{f(d)}{2}$ (on a alors $A > d$). Appliquons le théorème du cours à la fonction $g : [0, A] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto f(x)$: il existe $c \in [0, A]$ tel que $\forall x \in [0, A]$, $g(x) \leq g(c)$ ou encore $\forall x \in [0, A]$, $f(x) \leq f(c)$. On a alors en particulier $f(d) \leq f(c)$. Donc pour tout $x \in [A, +\infty[$, $f(x) \leq f(c)$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq f(c)$, ce qui prouve la propriété demandée.

Correction de l'exercice 2.3

i)$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$.
ii) $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$.
iii) Théorème des valeurs intermédiaires. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Si $d \in \mathbb{R}$ est tel que $d \in]\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = d$.
iv) Conditions suffisantes sur f :

1. f est surjective (toutes les valeurs de J possèdent un antécédent par f) ;
2. f est strictement monotone sur I ;
3. f est continue et dérivable sur I ;
4. f' ne s'annule pas sur I.

Alors f^{-1} est définie de J dans I, elle est continue, dérivable, strictement monotone, et

$$\forall x \in J,\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$