Université de Montpellier II

BioMath 1 (2004-2005)

Cours: Etudes de fonctions

Jérôme Droniou, Daniel Guin [1].

1 Continuité

Définition 1 *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue en un point $x \in I$ si elle admet une limite en ce point (cette limite est alors forcément $f(x)$). Une fonction est continue sur I si elle est continue en tout point de I.*

Cette notion se comprend intuitivement en considérant qu'une fonction est continue si "on peut tracer son graphe sans lever le crayon", i.e. s'il n'y a pas de saut dans le graphe de la fonction. Un premier exemple simple de fonction continue est $f(x) = x$. En guise d'exemple typique de fonction qui n'est pas continue, on peut citer la fonction définie par $f(x) = 0$ lorsque $x \leq 0$, $f(x) = 1$ lorsque $x > 0$ (dont le graphe est donné dans la figure 1 ci-dessous): son graphe a un saut en 0 et on constate qu'elle n'a pas de limite en 0 (de sorte qu'elle ne vérifie effectivement pas la définition). Mais cet exemple n'est pas le seul

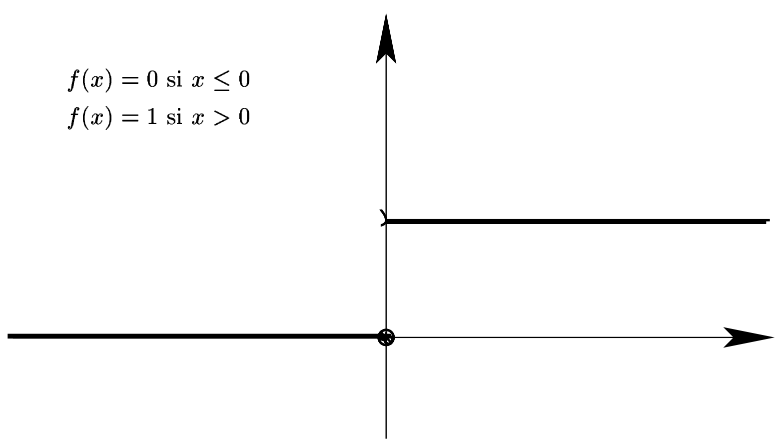


Figure 1: Exemple de fonction non-continue

genre de discontinuité qu'on peut rencontrer; la fonction $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, dont le graphe est dans le polycopié concernant les généralités sur les fonctions, n'est pas continue: elle n'a pas de limite en 0, mais à cause d'oscillations trop fortes.

Vérifier qu'une fonction est continue en faisant appel à la définition peut paraitre ardu en général, mais si on se rappelle qu'on sait comment les limites se comportent vis-a-vis des sommes, produits et compositions, la proposition suivante nous donne des moyens simples de voir que beaucoup de fonctions sont continues.

Proposition 1 *i) Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont continues, alors $f + g : I \to \mathbb{R}$ et $fg : I \to \mathbb{R}$ sont continues.*

[1] Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France. emails: `droniou@math.univ-montp2.fr`, `dguin@math.univ-montp2.fr`

ii) Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont continues et g ne s'annule en aucun point de I, alors $\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$ est continue.

iii) Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont continues, alors la fonction composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue.

En résumé, quand ces objets sont définis:

La somme, le produit et la composition de fonctions continues sont continues.

Pour vérifier en pratique qu'une fonction est continue, on cherchera donc à voir si elle s'exprime comme sommes, produits et/ou compositions de fonctions que l'on sait être continues. Par exemple, sachant que $f(x) = x$ est continue, on en déduit que $h(x) = x^2 = f(x)f(x)$ est continue.

On admettra que les fonctions usuelles (fonctions puissance, cosinus, sinus, exponentielle, logarithme) sont continues sur leur domaine de définition.

Les fonctions continues ont des propriétés intéressantes; en voilà trois en particulier.

Théorème *(des valeurs intermédiaires) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et γ est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.*

Une preuve intuitive de ce théorème est la suivante: si on suppose par exemple $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ alors en partant de a on se trouve en dessous de la droite horizontale D située à la hauteur γ; si on suit le graphe de f, on doit se retrouver au dessus de D lorsque l'on atteint l'abscisse b; comme on suit le graphe de f sans lever le crayon (puisque f est continue), cela signifie qu'on a forcément coupé D à un moment donné; le point où l'on coupe donne en abscisse un c tel que $f(c) = \gamma$.

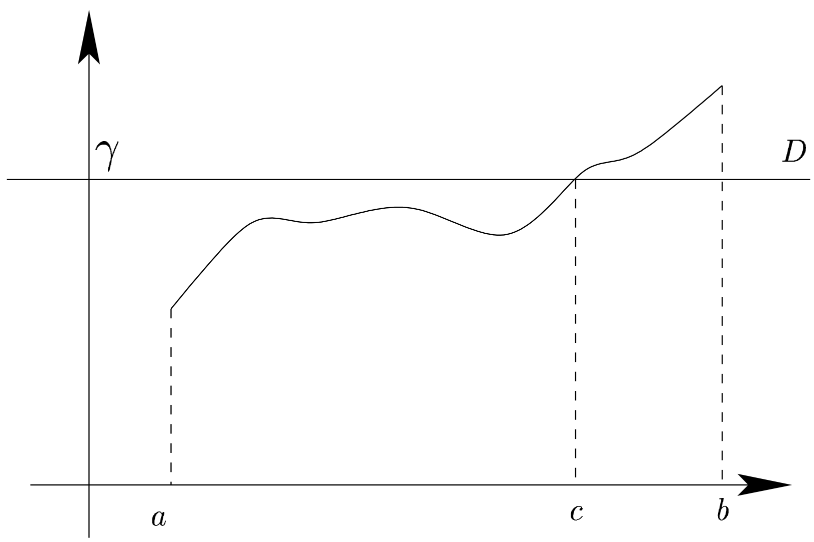
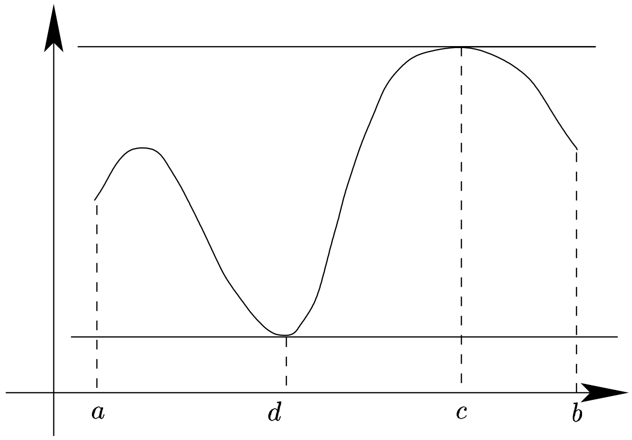


Figure 2: Illustration du théorème des valeurs intermédiaires

En d'autres termes, f prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$; cette propriété est fausse si la fonction n'est pas continue (par exemple, la fonction de la figure 1 ne prend jamais la valeur $1/2$, qui est pourtant comprise entre sa valeur en $x = -1$ et sa valeur en $x = 1$).

Théorème *(des extrema) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f a un maximum et un minimum, i.e. il existe c et d dans $[a, b]$ tel que $f(c) \geq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ et $f(d) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.*

Le fait que l'intervalle de définition soit fermé et borné est essentiel (de même que la continuité de la fonction); par exemple, $f(x) = 1/x$ définie sur $]0, \infty[$ n'a pas de maximum sur cet intervalle. Ce théorème est illustré dans la figure 3.



d: minimum de f
c: maximum de f

Figure 3: Illustration du théorème des extrema

Ces deux théorèmes sont intéressants car ils nous disent, sous des hypothèses relativement simples, "il existe au moins une solution à tel problème" (le problème étant soit de chercher un c tel que $f(c) = \gamma$, γ étant connu, soit de chercher des points où f est la plus grande ou la plus petite possible), solution que l'on ne sait pas forcément calculer (mais que l'on peut souvent approcher: voir la méthode de dichotomie en TD).

Le dernier théorème concernant les fonctions continues est celui de la bijection réciproque. Nous avons vu dans le polycopié d'introduction aux fonctions ce qu'est une fonction bijective; ce théorème permet, sous des hypothèses facilement vérifiables, de montrer que des fonctions sont effectivement bijectives.

Théorème *(de la bijection réciproque) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ de même nature que I (ouvert, fermé, semi-ouvert...) et $f : I \to J$ est bijective. La bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ de f est continue et a même monotonie que f.*

Pour déterminer les extrémités de J, il faut prendre en compte la nature de I et le sens de croissance de f; par exemple, si $I = [a, b[$ et f est décroissante, alors $J =]\lim_{x\to b} f(x), f(a)]$ (f étant décroissante, elle change l'ordre des extrémités; comme $a \in I$, l'extrémité correspondante dans J est simplement la valeur de f en a; mais $b \notin I$ donc la valeur de f en b n'a pas de sens et on doit prendre la limite de f en b comme deuxième extrémité de J).
Ce théorème permet de justifier l'existence de la fonction exponentielle $\mathbb{R} \to]0, \infty[$: on a définit $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, et on peut vérifier que cette fonction est continue strictement croissante; elle réalise donc une bijection de $]0, \infty[$ sur $]\lim_{x\to 0} \ln(x), \lim_{x\to\infty} \ln(x)[=] - \infty, \infty[= \mathbb{R}$, et $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ est la bijection réciproque du logarithme.
Ce théorème permet aussi de compter précisément le nombre de solutions c de $f(c) = \gamma$ (le théorème des valeurs intermédiaires n'affirme que l'existence d'au moins une telle solution, et ne permet pas de savoir combien il y en a), en découpant l'intervalle d'étude de la fonction pour se restreindre à des zones où elle est bijective (voir TD).

2 Dérivation, tableau de variations

Définition 2 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. f est dérivable en $x \in I$ si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe. On note alors cette limite $f'(x)$. Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I.

L'interprétation géométrique de la dérivée est classique: $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe de f en x (notons que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ représente la pente de la droite qui joint $(x+h, f(x+h))$ et $(x, f(x))$).

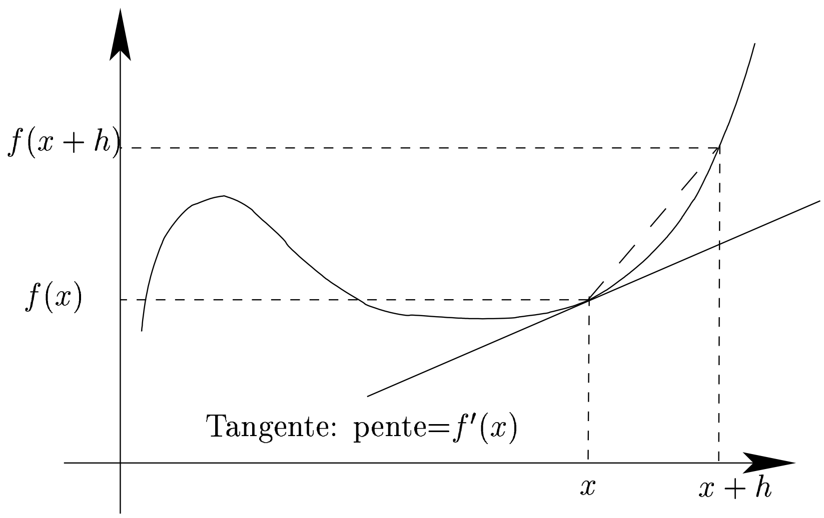


Figure 4: Illustration graphique de la dérivée

Le lien entre la continuité et la dérivabilité est le suivant... attention à ne pas se tromper de sens!

> Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x \in I$, alors f est continue en x; en particulier, si f est dérivable sur I, f est continue sur I.

> Comme pour la continuité, on admettra que les fonctions usuelles (fonctions puissance, cosinus, sinus, exponentielle, logarithme) sont dérivables sur leur domaine de définition, bornes exclues.

Les dérivées des fonctions usuelles doivent être connues...

Fonction f	Dérivée f'
$x \to x^\alpha$	$x \to \alpha x^{\alpha-1}$
$x \to \ln(x)$	$x \to \frac{1}{x}$
$x \to e^x$	$x \to e^x$
$x \to \cos(x)$	$x \to -\sin(x)$
$x \to \sin(x)$	$x \to \cos(x)$
$x \to \tan(x)$	$x \to \frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$

... de même que les règles de dérivation des sommes, produits et fonctions composées:

i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables, alors λf, $f+g$ et fg sont dérivables et $(\lambda f)' = \lambda f'$, $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$.

ii) Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables et g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$.

iii) Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont dérivables, alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$.

iv) Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective, et $x \in I$. Si $f'(x) \neq 0$, alors $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en $y = f(x)$ et $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}$.

La dérivée d'une fonction est un outil très puissant pour l'étude de ladite fonction. Deux résultats illustrent ceci.

Théorème *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si $c \in]a,b[$ est un extremum de f et f est dérivable en c, alors $f'(c) = 0$.*

La preuve de ce théorème est simple: si c est un maximum de f, alors $f(c+h) \leq f(c)$ pour tout h petit (tel que $c+h$ soit dans $]a,b[$), soit $f(c+h) - f(c) \leq 0$; en prenant $h > 0$ et en divisant par h, on trouve $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$ soit, en faisant $h \to 0^+$, $f'(c) \leq 0$; si on fait la même chose avec $h < 0$, l'inégalité change de sens quand on divise par h et on trouve donc, lorsque $h \to 0^-$, $f'(c) \geq 0$, ce qui achève de prouver que $f'(c) = 0$.

Autrement dit, pour trouver les extrema de f qui ne sont pas aux bornes de l'intervalle de définition, on peut commencer par chercher les points où f' s'annule: les extremas, s'il y en a, sont parmi ces points (mais ces points ne sont pas forcément des extrémas: penser à $f(x) = x^3$).

Vous connaissez déjà bien la deuxième application essentielle de la dérivée:

Théorème *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I; f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I.*

On peut préciser ce résultat dans le cas où l'on recherche de la stricte monotonie (c'est important quand on souhaite vérifier les hypothèses du théorème de la bijection réciproque): si $f' > 0$ sur I (respectivement < 0) alors f est strictement croissante sur I (respectivement strictement décroissante).

A partir de la dérivée, on peut construire le tableau de variation de f qui aide à sa construction (on indique dans ce tableau, en général, les zones où f est croissante, celles où elle est décroissante, ainsi que les limites ou les valeurs en des points particuliers). Cependant, la simple croissance de f ne permet pas toujours de bien la tracer: les deux fonctions de la figure 5 sont toutes deux croissantes, mais ont une allure très différente. C'est pourquoi on introduit la notion de convexité.

Définition *(convexité) Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si elle est partout située au dessous de ses sécantes (i.e. des segments de droite qui rejoignent deux point du graphe de f); elle est concave si elle est partout située au dessus de ses sécantes.*

De manière grossière, une fonction convexe "a sa bosse vers le bas" et une fonction concave "a sa bosse vers le haut" (notez qu'il n'y a aucun lien entre la monotonie d'une fonction et son caractère convexe ou concave: une fonction convexe peut être croissante, décroissante, ou tantôt croissante et tantôt décroissante). Connaitre le caractère convexe ou concave d'une fonction sur un intervalle est donc une aide pour la tracer (on sait d'avance comment orienter la bosse de la fonction).
La définition n'est clairement pas pratique pour vérifier la convexité d'une fonction; heureusement, la convexité s'obtient très facilement en étudiant le signe de la dérivée seconde de la fonction.

Théorème *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f' : I \to \mathbb{R}$ soit dérivable. Si $f'' \geq 0$ sur I alors f est convexe sur I; si $f'' \leq 0$ sur I alors f est concave sur I.*

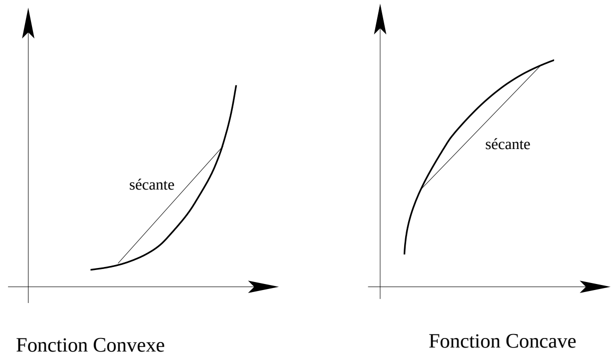


Figure 5: Fonctions convexes et concaves

Les points où la fonction passe de convexe à concave (ce sont donc des points où la dérivée seconde s'annule) sont appelés "points d'inflexion"; ce sont des points où la fonction colle de très près à sa tangente.

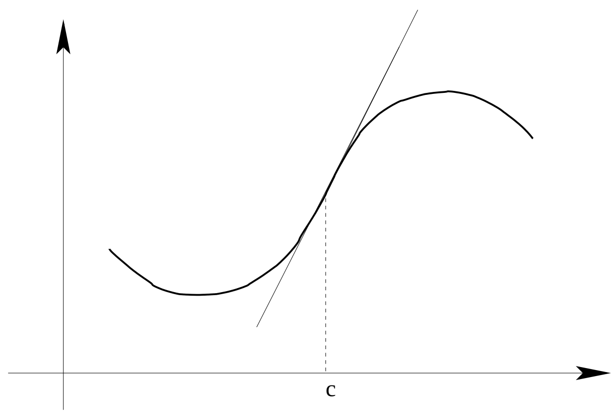


Figure 6: c est un point d'inflexion (la fonction est convexe avant c et concave après)

On constate de plus qu'une fonction convexe est toujours située au dessus de ses tangentes (voir figure 7); à l'inverse, une fonction concave est toujours située au dessous de ses tangentes.

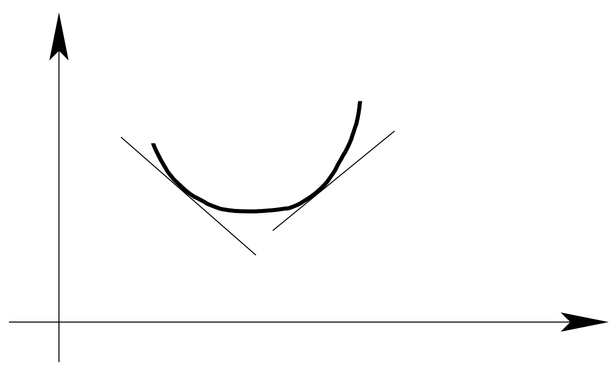


Figure 7: position d'une fonction convexe par rapport a ses tangentes