Université Montpellier II

ULMA102, Biomaths1
1er semestre 2004-2005

Feuille 3

1 Etude de fonctions, modélisation

Exercice 1. Donner les domaines de définition des fonctions suivantes, et expliquer pourquoi elles sont continues sur leur domaine.

$$x \longmapsto x^2 + \ln(\cos(x)) \; ; x \longmapsto \tan(x^3) \; ; x \longmapsto x\cos(\ln(x)) \; ; x \longmapsto x^{2\cos(x)}$$

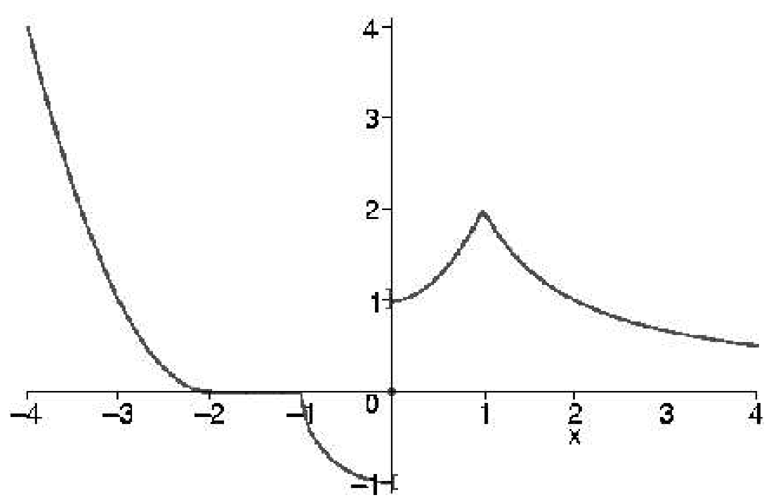
Exercice 2. Montrer que $x \longmapsto x^3 - x - 1$ prend la valeur 1 entre $x = 0$ et $x = 2$. Pouvez-vous situer une solution par rapport à $x = \frac{1}{2}$? Pouvez-vous en-donner une approximation à $0,5$ près ? à 10^{-1} près ?

Exercice 3. Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$x \longmapsto \cos x \; ; x \longmapsto \sin x \; ; x \longmapsto \ln x \; ; x \longmapsto e^x \; ;$$
$$x \longmapsto \ln(x^3 - 2) \; ; x \longmapsto 7x^4 - 12x^3 + x \; ; x \longmapsto \sqrt{x^2+1} \; ;$$
$$x \longmapsto \sin(2x)\cos(7x) \; ; x \longmapsto \frac{1}{(2x+1)^4} \; ; x \longmapsto \sqrt{x^2 - 2x - 2}.$$

Exercice 4. Quelle est la pente de la tangente en 1 au graphe de la fonction $x \longmapsto \frac{4x}{x^2+1}$?

Exercice 5. Essayer de définir une fonction dont le graphe est le suivant :



Sans calculs, indiquer les points où la fonction est dérivable et donner l'allure du graphe de sa dérivée.

Exercice 6. (cf. Session d'examen de Juin 2002)
On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + x)\, e^{-x}$.

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2. Etudier le sens de variation et la convexité de f. Calculer $f(1)$ et les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

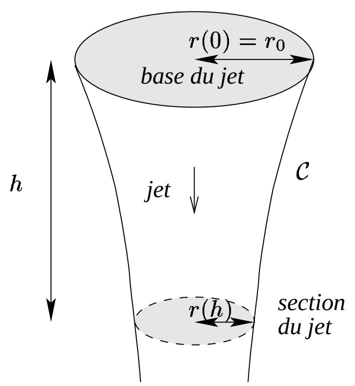
3. Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

4. Justifier que l'equation $f(x) = -1$ admet une solution $x_0 \in \mathbb{R}$; est-elle unique ? Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près (on précisera la méthode utilisée).

5. Prouver que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]0,1]$. Quel est l'ensemble de définition de la fonction réciproque que l'on peut alors définir ? On note désormais f^{-1} cette fonction réciproque ; tracer le graphe de f^{-1} dans le même repère $(0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

6. Prouver que f^{-1} est dérivable au point $y = \frac{2}{e}$ et calculer $(f^{-1})'\left(\frac{2}{e}\right)$.

Exercice 7. (Une courbe mathématique observée tous les matins)



Un étudiant de Deug Sciences, se brossant les dents le matin, observe le jet du robinet. Il remarque fort justement que le rayon r de la section du jet n'est pas constant mais, au contraire, diminue alors que la distance h à la base du jet augmente. Pour comprendre la forme du jet, il s'agit d'identifier la fonction $r(h)$, $h \in \mathbb{R}_+$, dont la courbe $\mathcal{C}$ délimite le jet (par révolution autour de l'axe du jet).

1. Préliminaires

   (a) Enoncer le théorème de la bijection réciproque.

   (b) Comment la fonction $f : x \mapsto x^{-\frac{1}{4}}$ est-elle définie ? On justifiera soigneusement la construction, en s'appuyant sur le théorème précédent.

   (c) Comment la représentation graphique de f se déduit-elle de celle de la fonction $x \mapsto x^{-4}$? Tracer rapidement l'allure de ces deux courbes, dans un même repère orthonormé.

2. Notons $v(h)$ la vitesse de l'eau et $S(h)$ la surface de la section du jet ; ce sont des fonctions de la variable h. Cependant, le débit $D = v(h)S(h)$ reste constant (il est imposé par le robinet). D'autre part, l'application de la dynamique des corps donne $\frac{1}{2}v^2(h) - \frac{1}{2}v^2(0) = gh$. Montrer que :

$$r(h) = r_0\,(1 + Kh)^{-\frac{1}{4}},$$

   où K est une constante dépendant de g, D et r_0.

3. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$. On expliquera par quelles transformations la représentation graphique de r se déduit de celle de la fonction f.

Exercice 8. (cf session de Janvier 2004)
Une femelle loutre, partie en quête de nourriture, entend les cris de détresse de son petit, resté dans le terrier de l'autre côté de la rivière, en amont (voir figure 1 : la loutre se trouve initialement au point L et le petit au point P). Elle désire rejoindre son petit le plus rapidement possible.
Supposons qu'elle se déplace à la vitesse $v_1 = 3\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ sur la berge et $v_2 = 2\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ dans l'eau (elle doit lutter contre le courant !). Par ailleurs, la rivière est large de 60 m et le terrier est placé à 150 m en amont de l'endroit où se trouve la loutre lorsqu'elle entend les cris.
En quel point M de la berge la loutre doit-elle entrer dans l'eau afin d'atteindre le terrier au plus vite ? On soignera la mise en équation et justifiera la méthode utilisée pour résoudre le problème d'optimisation.

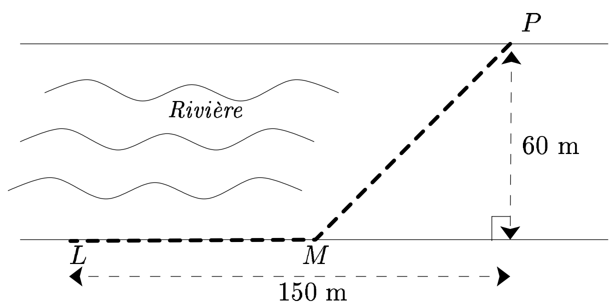
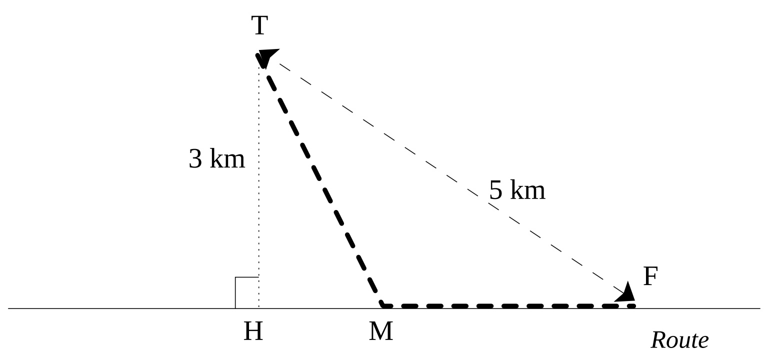


Figure 1: trajet de la loutre vers son petit

Exercice 9. Un agriculteur, au volant de son tracteur T, doit se rendre depuis son champ jusqu'à sa ferme F. Il se trouve à 3 kilomètres de la route qui mène à la ferme, et à 5 kilomètres en tout de celle-ci, selon la figure:



On se propose de déterminer le trajet qu'il doit suivre pour dépenser le moins de carburant possible. Il a le choix entre aller directement à F ou rejoindre en ligne droite la route en un point M puis suivre celle-ci jusqu'à F (voir figure).
On désigne par c la consommation en litres par kilomètre du tracteur sur route et λc celle à travers champs (bien sûr, on a $\lambda \geq 1$ et λ dépend de l'état du terrain).

a) Calculer la distance HF.

b) On suppose $\lambda = 1$. Trouver le chemin le plus économique.

c) On suppose $\lambda = 2$. En quel point M le tracteur doit-il rejoindre la route pour consommer le moins de carburant possible ?

Question subsidiaire : trouver la valeur λ_0 de λ au-dessous de laquelle il est inutile de chercher à rejoindre la route.

Exercice 10. La distance qui sépare deux molécules résulte d'un équilibre entre une force attractive en $\frac{1}{r^7}$ et une force répulsive en $\frac{1}{r^{13}}$. Le potentiel correspondant est dit "potentiel de Jones" et est donné par la fonction

$$V : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad r \longmapsto V(r) = \left(\frac{4}{r}\right)^{12} - \left(\frac{4}{r}\right)^{6}.$$

Les distances où V est minimum s'appellent "distances d'équilibre".

a) Calculer $\lim_{r\to 0} V(r)$, $\lim_{r\to +\infty} V(r)$.

b) La fonction V est-elle continue ? dérivable ? Quels sont les points d'annulation de la dérivée de la fonction V ?

c) Déterminer les minima globaux de V. Représenter rapidement le graphe de V.

Exercice 11. (cf. Session d'examen de Janvier 2000)
Les échanges entre une cellule et son environnement s'effectuent via sa membrane et sont proportionnels à la surface de celle-ci. On considère une cellule cylindrique de base un disque de rayon r et de hauteur h.

a) Quel est le volume de la cellule ? Quelle est sa surface ?

b) On suppose que le volume de cette cellule est égal à 1 mm^3. Quelle est la valeur du rayon r qui permet à la cellule d'avoir la plus petite surface ? (les échanges avec l'extérieur s'effectuant à travers son bord, cela revient à minimiser les échanges avec l'extérieur) Quelle est la hauteur correspondante ?

Exercice 12. (cf. Session d'examen de Septembre 2002)
Lorsqu'on veut équarrir (c'est-à-dire tailler) un tronc d'arbre de manière à obtenir la poutre la plus résistante possible, on se garde bien de lui donner une section carrée, mais une section qui soit plus haute que large. En mécanique, on montre que la résistance de la poutre est proportionnelle au produit de l'aire de la section par sa hauteur. Trouver les dimensions de la section de la poutre la plus résistante que l'on puisse fabriquer avec un tronc de diamètre D (on supposera que le tronc est cylindrique ; la section est donc un rectangle dont les diagonales sont de mesure D).
Indication : On notera h la hauteur de la poutre et l sa largeur (ce sont respectivement la longueur et la largeur de la section rectangulaire, voir figure 2). Quelle relation lie h, l et D ? On pourra ensuite exprimer la résistance de la poutre en fonction de l (et de la

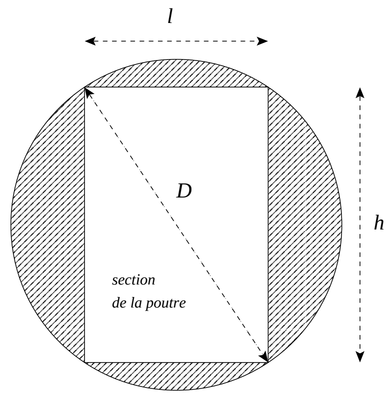


Figure 2: Vue du tronc en coupe

constante D) et chercher le maximum de la fonction obtenue (on justifiera soigneusement la méthode utilisée).