Université Montpellier II

ULMA102, Biomaths1
1er semestre 2004-2005

Feuille 1

1 Introduction au raisonnement: hypothèses, conclusions

Exercice 1. Donner les négations des assertions suivantes :

1. s'il fait beau aujourd'hui, il pleuvra demain ;
2. pour tout x dans $\mathbb{N}$, 2 divise x ;
3. $\exists x \in \mathbb{N}$, tel que $x > 0$ et $x < 1$.

Exercice 2. Soit a un réel. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $a = -3 \Longrightarrow a^2 = 9$;
2. $a^2 = 9 \Longrightarrow a = 3$;
3. $a = 3 \Longleftrightarrow a^2 = 9$;
4. $a \neq 3 \Longrightarrow a^2 \neq 9$.

Exercice 3. On considère l'équation suivante:

$$(P) \qquad x^5 + 2x^{12} - x + 0.01 = 0$$

et on considère les raisonnements suivants:

i) "On prend deux solutions x et y de (P); si (P) a une unique solution, alors $x = y$".

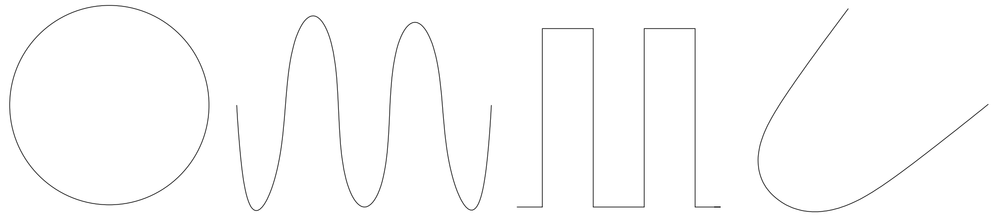
ii) "Soient x et y deux solutions de (P); on a $x = y$".

Ces deux raisonnements disent-ils la même chose? Pouvez-vous déduire de l'un ou l'autre de ces raisonnements que (P) a au moins une solution? au plus une solution? aucune solution?

2 Généralités sur les fonctions

Exercice 4. Soient a et b deux réels vérifiant $-0.5 < a < 1$ et $-10 < b < -7$. Donner un encadrement de $a - b$ et $\frac{b}{a}$.

Exercice 5. Les dessins suivants peuvent-ils être des graphes d'une fonction dans un repère convenablement choisi ?



3 Fonctions classiques

Exercice 6. Tracer les graphes des fonctions : $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2+2$, $h(x) = (x+2)^2$, $k(x) = 2x^2$, $l(x) = (\frac{x}{2})^2$, $m(x) = 2(\frac{x}{2})^2 - 5$.

Exercice 7. Tracer les graphes des fonctions : $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = 5e^{100x}$, $h(x) = \ln(x)$, $k(x) = \ln(\pi x)$, $l(x) = e^{\ln(x)}$, $m(x) = 2e^x + 1$, $u(x) = \sin(2x) + 3$, $v(x) = 8\cos(x)$.

Exercice 8. Indiquer si les formules suivantes sont vraies ou fausses : $e^{ab} = e^a\, e^b$, $e^{ab} = (e^a)^b$, $e^{ab} = (e^b)^a$, $e^{ab} = e^{a^b}$, $\ln(xy) = (\ln x)(\ln y)$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$, $x^{a+b} = x^a + x^b$, $x^{a+b} = x^a x^b$, $x^a + y^a = (x+y)^a$.

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes : $\exp(2\ln x) = 9$; $\ln(y+6) - \ln(y+2) + \ln(y+3) = 0$.

Exercice 10. La concentration d'un réactif d'une réaction chimique (dite ici *du second ordre*) est donnée au cours du temps par la loi

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + kC_0 t},$$

où $k > 0$ est une constante de cinétique chimique. Tracer l'allure du graphe de C en fonction du temps et interpréter la constante C_0.

Exercice 11. Le radium se désintègre au cours du temps en obéissant à la loi suivante : $M(t) = M_0 e^{-0{,}000436\, t}$ où $M(t)$ est la masse présente au temps t exprimé ici en années. Au départ de $t = 0$, combien de temps faut-il attendre pour que la masse présente se soit réduite de moitié ? Et au départ de $t = 10$? Quel phénomène remarquable venez-vous de mettre en évidence ?

Exercice 12. Donner les domaines naturels de définition des fonctions :

$$a)\, x \longmapsto \frac{1}{x^2+1},\ b)\, x \longmapsto \frac{1}{x+7},\ c)\, x \longmapsto \frac{1}{\cos(3x)},$$
$$d)\, x \longmapsto \sqrt{1-x^2},\ e)\, x \longmapsto \sqrt{x^2+2x-3},\ f)\, x \longmapsto \frac{1}{\ln(x)},$$
$$g)\, x \longmapsto \sqrt{\ln(x^2+1)},\ h)\, x \longmapsto \sqrt{e^x - x}.$$

4 Limites et continuité

Exercice 13. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3)}{x^2},\ \lim_{x\to+\infty} (x - \ln x),\ \lim_{x\to0^+} x^2 \ln x,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}}{x^2},\ \lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x^2}},\ \lim_{x\to0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x + \cos(1/x)),\ \lim_{x\to0} \exp[\sin(1/\ln(x))],\ \lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Exercice 14. Les fonctions suivantes sont-elles continues?

1. $x \longmapsto E(2x)$;
2. $x \longmapsto \sqrt{\ln(x^2+x)}$;
3. la fonction définie par $x \longmapsto \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $x \longmapsto 0$ si $x = 0$;
4. la fonction f définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ (indication : quelles sont les limites des suites $u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ et $f(u_n)$?)

Exercice 15. En étudiant certaines populations (voir cours sur les équations différentielles), on se rend compte qu'elles peuvent évoluer au cours du temps selon les lois $f(t) = ae^{-kt}$ ou $g(t) = b(1 - e^{-rt})$. Interpréter les constantes a, b, k et r qui interviennent dans ces lois *(on pourra par exemple essayer de comprendre ce que cela signifie, concernant les produits, si le temps ou l'une ou l'autre de ces constantes sont très grands ou très petits).*