# THÉORÈME D'EXISTENCE ET UNICITÉ POUR UNE ÉQUATION QUASI LINÉAIRE, AVEC CONDITIONS AUX LIMITES

**Alain Yves Le Roux**
**Cours de DEA**

Bordeaux, octobre 1999

## 1 Enoncé du problème.

On veut montrer l'existence d'une solution unique du problème suivant, pour $x \in I = ]a, b[$, un intervalle réel, et $t > O$.

Chercher $u$ définie sur $I \times ]0, +\infty[$ vérifiant l'équation

$$u_t + f(u)_x = 0 , \tag{1.1}$$

la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad x \in I , \tag{1.2}$$

et dans la mesure où elles sont actives, les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(a, t) &= A(t) \\ u(b, t) &= B(t) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Nous verrons par la suite que ces conditions aux limites ne sont pas toujours actives, en particulier lorsque les caractéristiques sont sortante. La définition de la solution que nous allons proposer va tenir compte de cette éventualité.

Dans (1.1), on suppose $f \in C^1(\mathbb{R})$. Il n'y a pas d'hypothèse de convexité, contrairement à la formule de Hopf et Lax.

Dans (1.2) et (1.3), on suppose dans un premier temps

$$u_0 \in C^2(\overline{I}), \;\; A, B \in C^2([0, +\infty[) \cap L^\infty(]0, +\infty[), \;\; A(0) = u_0(a), \; B(0) = u_0(b) .$$

Pour le théorème d'existence, on utilise une méthode de viscosité, qui consiste à partir de l'équation

$$u_t^\epsilon + f(u^\epsilon)_x = \epsilon \, u_{xx}^\epsilon \; , \tag{1.4}$$

avec $\epsilon > 0$, destiné à tendre vers zéro, et des mêmes conditions initiales (1.2) et aux limites (1.3). Par un argument de compacité, on va obtenir la convergence (forte dans $L^1$) d'une suite extraite

$\{u^{\epsilon_n}\}$ avec $\epsilon_n$ tendant vers zéro, vers une solution $u$ de (1.1), (1.2), (1.3), et caractérisée par une formulation particulière, qui en assure l'unicité

# 2 Quelques outils et notations

Nous utiliserons l'espace des fonctions à variation bornée sur un ouvert $\Omega$, noté $BV(\Omega)$ et que l'on peut définir par

$$u \in BV(\Omega) \;\Leftrightarrow\; \|u\| \;=\; \operatorname*{Sup}_{\Phi\in\Delta} \left(\int_\Omega \mathrm{u}\ \mathrm{div}\Phi\, dx\right) \;<\; +\infty\ ,$$

où $\Delta \;=\; \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \left|\varphi\right|_\infty \;\leq\; 1\}^2$. En dimension un d'espace, on a des formulations plus courantes. Par exemple, posons pour $\Omega = I$

$$\|u\| \;=\; \lim_{\eta\longrightarrow 0} \left(\frac{1}{\eta} \int_a^{b-\eta} |u(x+\eta) - u(x)|\, dx\right),$$

et $u \in BV(I)$ lorsque $\left\|u\right\|$ est finie. On trouve aussi, en notant $\Delta(I)$ l'ensemble des subdivisions discrètes de $I$, c'est à dire l'ensemble des suites finies croissantes $\{x_i\} \;=\; \{x_0, x_1, .., x_N\}$, avec $x_0 = a,\ x_N = b$,

$$\|u\| \;=\; \sup_{\{x_i\}\in\Delta(I)} \sum_{i=1}^{N} |u(x_{i+1}) - u(x_i)|\ .$$

Toutes ces définitions sont équivalentes ; la quantité $\left\|u\right\|$est appelée variation totale de $u \in BV(\Omega)$ et définit une seminorme sur cet espace (de Banach) (on a une norme en ajoutant $\left|u\right|_{L^\infty(\Omega)}$).

On utilisera également l'espace

$$W^{1,1}(I) \;=\; \left\{ u \in L^1(I) \mid u' \in L^1(I)\ \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{1,1} \;=\; |u|_{L^1(I)} \;+\; |u'|_{L^1(I)}\ .$$

De façon analogue pour $Q = I\times]0,T[$, avec $T > 0$ fixé, on définit

$$W^{1,1}(Q) \;=\; \left\{ u \in L^1(Q) \mid \frac{\partial u}{\partial x} \;\in\; L^1(Q)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t} \;\in\; L^1(Q)\ \right\}$$

avec sa norme

$$\|u\|_{W^{1,1}(Q)} \;=\; |u|_{L^1(Q)} \;+\; \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{L^1(Q)} \;+\; \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{L^1(Q)}\ .$$

On a

$$W^{1,1}(Q) \;\subset\; BV(Q)\ ,$$

et pour la dimension un d'espace

$$BV(I) \;\subset\; L^\infty(I)\ .$$

Une fonction de $BV(I)$ admet en tout point une limite à gauche et une limite à droite. Soit $u \in BV(Q)$ ; pour presque tout $t \in ]0,T[$, $u(.,t) \in BV(I)$ et admet ainsi en tout point une limite à gauche et une limite à droite. Ceci permet d'établir l'existence de traces en $a$ et $b$, atteintes pour la convergence presque partout, et donc aussi dans $L^1(0,T[)$ par le théorème de Lebesgue (convergence dominée).

De la même façon, pour presque tout $x \in I$, $u(x,.) \in BV(]0,T[)$ et admet en tout point une limite à gauche et une limite à droite, et donc $u$ admet une trace en $t=0$, atteinte pour la convergence presque partout et dans $L^1(I)$, lorsque $t \longrightarrow 0$.

On utilisera les théorèmes de compacité suivants, qui sont énoncent des résultats similaires.

**Théorème 2.1 (Théorème de Riesz-Tamarkin)** *L'injection de $W^{1,1}(Q)$ dans $L^1(Q)$ est relativement compacte.*

**Théorème 2.2 (Théorème de Helly)** *L'injection de $BV(Q) \cap L^\infty(Q)$ dans $L^1(Q)$ est relativement compacte.*

Ainsi, de toute famille bornée de $W^{1,1}(Q)$ on pourra extraire une suite convergente dans $L^1(Q)$. De plus, la limite de cette suite est un élément de $BV(Q) \cap L^\infty(Q)$.

Dans les démonstrations, pour établir des estimations a priori, on utilisera le lemme suivant

**Lemme 2.3 (Lemme de Saks)** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $v \in C^1(\Omega)$. Alors*

$$\lim_{\eta \longrightarrow 0,\ \eta > 0} \int_{\{x|\ |v|<\eta\}} |\mathrm{grad}\ v|\ dx \ = \ 0\ . \tag{2.1}$$

On introduit l'approximation suivante de la fonction "signe", pour $\eta > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$,

$$sg_\eta(\xi) \ = \ \begin{cases} 1 & si\ \xi > \eta\ , \\ \frac{\xi}{\eta} & si\ -\eta \leq \xi \leq \eta\ , \\ -1 & si\ \xi < -\eta\ , \end{cases} \tag{2.2}$$

puis la fonction $I_\eta$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$I_\eta(x) \ = \ \int_0^x sg_\eta(\xi)\ dgx\ , \tag{2.3}$$

et qui approche la valeur absolue.

# 3 Les estimations a priori

Soit $\epsilon > 0$ (destiné à tendre vers zéro), $T > O$ (destiné à tendre vers l'infini). On considére le problème (1.2), (1.3), (1.4) posé pour $(x,t) \in Q = I \times ]0,T[$, et on sait qu'il admet une solution unique $u^\epsilon \in C^3(Q)$.

## 3.1 Le principe du maximum

Si $u^\epsilon$ présente un maximum en $(x_0,t_0)\in Q$, on aura en ce point

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x}(x_0,t_0) \;=\; 0 \;\;,\;\; \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2}(x_0,t_0) \;\leq\; 0\;,$$

donc

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(x_0,t_0) \;\leq\; 0\;.$$

Un tel maximum ne peut donc pas apparaître (on aurait $\dfrac{\partial u^\epsilon}{\partial t}\leq 0$ dans son voisinage) à l'intérieur de $Q$. Il ne peut donc en apparaître qu'en $x=a$, en $x=b$ ou en $t=0$. D'où l'estimation

$$|u^\epsilon|_{L^\infty(Q)} \;\leq\; M_0 \;=\; \mathrm{Max}\left\{\, |A|_{L^\infty(]0,T[)},\; |B|_{L^\infty(]0,T[)},\; |u_0|_{L^\infty(I)} \right\}. \tag{3.1}$$

## 3.2 L'estimation de $\dfrac{\partial u^\epsilon}{\partial x}$ dans $L^1(Q)$

Pour $t\in]0,T[$, fixé, on dérive (1.4) par rapport à $x$ et on multiplie par $sg_\eta(u_x^\epsilon)$, puis on intègre sur $I$. On obtient

$$\frac{d}{dt}\int_I I_\eta(u_x^\epsilon)dx \;+\; \int_I sg_\eta(u_x^\epsilon)f(u^\epsilon)_{xx}dx \;=\; \epsilon\int_I u_{xxx}^\epsilon sg_\eta(u_x^\epsilon)dx\;. \tag{3.2}$$

Or

$$\int_I sg_\eta(u_x^\epsilon)f(u_{xx}^\epsilon)dx \;=\; [sg_\eta(u_x^\epsilon)f(u^\epsilon)_x]_{x=a}^{x=b} - \int_I sg'(u_x^\epsilon)f'(u^\epsilon)u_x^\epsilon u_{xx}^\epsilon dx$$

où

$$\left|\int_I sg'(u_x^\epsilon)f'(u^\epsilon)u_x^\epsilon u_{xx}^\epsilon dx\right| \;\leq\; \int_{\{|u_x^\epsilon|\leq\eta\}} |f'(u^\epsilon)|\left|\frac{u_x^\epsilon}{\eta}\right| |u_{xx}^\epsilon|dx\;,$$

qui tend vers zéro d'après le lemme de Saks et sachant que $\left|\dfrac{u_x^\epsilon}{\eta}\right|\leq 1$.

Par ailleurs

$$\epsilon\int_I u_{xxx}^\epsilon sg_\eta(u_x^\epsilon)dx \;=\; [\epsilon u_{xx}^\epsilon sg_\eta(u_x^\epsilon)]_{x=a}^{x=b} -\; \epsilon\int_I sg'_\eta(u_x^\epsilon)|u_{xx}^\epsilon|^2dx\;,$$

où

$$-\epsilon\int_I sg'_\eta(u_x^\epsilon)|u_{xx}^\epsilon|^2dx \;\leq\; 0\;\;.$$

De plus

$$[(-f(u^\epsilon)_x \;+\; \epsilon u_{xx}^\epsilon)sg_\eta(u_x^\epsilon)]_{x=a}^{x=b} \;=\; [u_t^\epsilon\, sg_\eta(u_x^\epsilon)]_{x=a}^{x=b}\;,$$

qui se majore par $\Big|A'(t)\Big| + \Big|B'(t)\Big|$.
On peut maintenant passer à la limite lorsque $\eta\longrightarrow 0$, pour obtenir l'inégalité

$$\frac{d}{dt}|u_x^\epsilon(.,t)|_{L^1(I)} \;\leq\; |A'(t)|+|B'(t)|\;,$$

d'où l'estimation

$$|u_x^\epsilon(.,t)|_{L^1(I)} \leq \;\Big|u_0'\Big|_{L^1(I)}M(t)\;\;. \tag{3.3}$$

avec

$$M(t) \;=\; \int_0^t (|A'(\tau)| + |B'(\tau)|)\, d\tau \;\leq\; M(T)\,.$$

On en déduit, en intégrant sur $]0,T[$,

$$|u_x^\epsilon|_{L^1(Q)} \;\leq\; T\; M(T)\,. \tag{3.4}$$

## 3.3 L'estimation de $\dfrac{\partial u^\epsilon}{\partial t}$ dans $L^1(Q)$

On introduit la fonction suivante, appelée relèvement

$$r(x,t) \;=\; A(t)\,\frac{x-b}{a-b} \;+\; B(t)\,\frac{x-a}{b-a}\;\;, \tag{3.5}$$

puis on pose

$$v^\epsilon(x,t) \;=\; u^\epsilon(x,t) \;-\; r(x,t)\,. \tag{3.6}$$

Alors $v^\epsilon$ vérifie l'équation

$$v_t^\epsilon \;+\; f(v^\epsilon + r(x,t))_x \;=\; -r_t(x,t) \;+\; \epsilon\, v_{xx}^\epsilon\,, \tag{3.7}$$

les conditions aux limites

$$v^\epsilon(a,t) \;=\; 0 \;\;,\;\; v^\epsilon(b,t) \;=\; 0\;, \tag{3.8}$$

et la condition initiale

$$v^\epsilon(x,0) \;=\; u_0(x) \;-\; r(x,0)\,. \tag{3.9}$$

Cette technique de relèvement a pour but d'obtenir des conditions aux limites homogènes, sans rien perdre de la généralité, ce qui va faciliter la démonstration de l'estimation.

On dérive (3.5) par rapport à $t$, puis on multiplie par $sg_\eta(v_t^\epsilon)$ et on intègre sur $I$. On obtient

$$\frac{d}{dt}\int_I I_\eta(v_t^\epsilon)dx + \int_I sg_\eta(v_t^\epsilon)f(v^\epsilon+r)_{xt}dx \;=\; \epsilon\int_I sg_\eta(v_t^\epsilon)v_{xxt}^\epsilon dx - \int_I r_{tt}sg_\eta(v_t^\epsilon)dx$$

On intègre par parties pour évaluer

$$\int_I sg_\eta(v_t^\epsilon)f(v^\epsilon+r)_{xt}dx \;=\; [sg_\eta(v_t^\epsilon)f(v^\epsilon+r)_t]_{x=a}^{x=b} - \int_I sg'_\eta(v_t^\epsilon)v_{tx}^\epsilon f(v^\epsilon+r)_t dx$$

$$= -\int_I sg'_\eta(v_t^\epsilon)v_{xt}^\epsilon f'(v^\epsilon+r)r_t\,dx \;-\; \int_{\{x|\,|v_t^\epsilon|<\eta\}} f'(v^\epsilon+r)\,\frac{v_t^\epsilon}{\eta}\,v_{tx}^\epsilon\,dx$$

$$= \;\int_I sg_\eta(v_t^\epsilon)\;(f'(v^\epsilon+r)r_t)_x\,dx \;-\; \int_{\{x|\,|v_t^\epsilon|<\eta\}} f'(v^\epsilon+r)\,\frac{v_t^\epsilon}{\eta}\,v_{tx}^\epsilon\,dx$$

Par le lemme de Saks, le dernier terme tend vers zéro lorsque $\eta$ tend vers zéro, et le précédent se majore par

$$\int_I |f''(u^\epsilon)|\ |u^\epsilon_x|\ |r_t|\ dx\ +\ \int_I |f'(u^\epsilon)|\ |r_{tx}|\ dx\ .$$

Plus haut, le terme entre crochets est nul parce que $v^\epsilon_t(a,0)=0,\ v^\epsilon_t(b,0)=0$.

Par ailleurs,

$$\epsilon \int_I sg_\eta(v^\epsilon_t)\ v^\epsilon_{xxt} dx\ =\ [\epsilon\ sg_\eta(v^\epsilon_t) v^\epsilon_{xt}]_{x=a}^{x=b} -\ \epsilon \int_I sg'_\eta(v^\epsilon_t)|v^\epsilon_{xt}|^2\ dx\ ,$$

où le dernier terme est négatif ou nul, et le précédent est nul parce que $v^\epsilon_t(a,0)=0$, $v^\epsilon_t(b,0)=0$.

Il reste donc

$$\frac{d}{dt}\int_I |v^\epsilon_t| dx\ \leq\ \int_I |f''(u^\epsilon)|\ |u^\epsilon_x|\ |r_t|\ dx\ +\ \int_I |f'(u^\epsilon)|\ |r_{tx}|\ dx\ +\ \int_I |r_{tt}| dx.$$

Compte tenu de (3.3) et (3.1), une estimation de la forme

$$\frac{d}{dt}\int_I |v^\epsilon_t|\ dx\ \leq\ C\ M'(t)\ (M(t)+1)\ +\ \frac{b-a}{2}\ (|A''(t)|+|B''(t)|)\ ,$$

d'où, pour tout $t\in ]0,T[$,

$$\int_I |v^\epsilon_t(x,t)| dx\ \leq\ C\ \left(\frac{1}{2}\ M(t)^2\ +\ M(t)\right) + \frac{b-a}{2}\int_0^t (|A''|+|B''|) d\tau\ +\ \int_I |v^\epsilon_t(x,0)| dx\ . \qquad (3.10)$$

Or, d'après (3.7),

$$v^\epsilon_t(x,0)\ =\ -f(u_0)_x\ -r_t(x,0)\ +\ \epsilon\ u_{0,xx}$$

où $r_t(x,0) = A'(0)\dfrac{x-a}{b-a} + B'(0)\dfrac{(x-b}{a-b}$ est borné. On peut donc majorer $v^\epsilon_t(x,0)$ par une constante qui ne dépend que de $u_0$, et non de $\epsilon$, que l'on note $K(u_0)$. On obtient donc, à partir de (3.10)

$$\int_I |v^\epsilon_t(x,t)| dx\ \leq\ C\ \left(\frac{1}{2}\ M(t)^2\ +\ M(t)\right)\ +\ \frac{b-a}{2}\int_0^t (|A''|+|B''|) d\tau\ +\ K(u_0)\ \ ,$$

d'où

$$|v^\epsilon_t|^2_{L^1(Q)} \leq\ \left(C\left(\frac{1}{2}\ M(T)^2\ +\ M(T)\right)\ +\ \frac{b-a}{2}\int_0^T (|A''|+|B''|) d\tau\ +\ K(u_0)\right)\ T\ . \qquad (3.11)$$

# 4 Le passage à la limite

Les estimations (3.1), (3.4) et (3.11) assurent que pour tout $\epsilon>0$, la solution $u^\epsilon$ reste dans un borné de $W^{1,1}(Q)$. On peut donc appliquer le théorème de Riesz Tamarkin, et conclure qu'il existe une suite $u^{\epsilon_n}$ convergente dans $L^1(Q)$. On note $u$ la limite de cette suite ; on sait également que $u\in BV(Q)\cap L^\infty(Q)$.

Par ailleurs, on a

$$\epsilon\ u^\epsilon_{xx}\ =\ f'(u^\epsilon)\ u^\epsilon_x\ +\ u^\epsilon_t\ ,$$

donc, en intégrant sur $I$, pour tout $t\in ]0,T[$,

$$\epsilon\,|u^\epsilon_{xx}|_{L^1(I)} \;\le\; |f'(u^\epsilon)|_{L^\infty(I)}\,|u^\epsilon_x|_{L^1(I)} \;+\; |u^\epsilon_t|_{L^1(I)}. \tag{4.1}$$

On déduit de (4.1), (3.3) et (3.10) que

$$\int_I (\epsilon\,|u^\epsilon_{xx}| \;+\; |u^\epsilon_x|)\;dx \;\le\; M_*(t)\;, \tag{4.2}$$

avec

$$M_*(t) \;=\; \Big(1 + \sup_{|u|\le M_0} |f'(u)|\Big)\;M(t) \;+\; C\Big(\frac{1}{2}M(t)^2 + M(t)\Big) \;+\; K(u_0).$$

Il est immédiat que cette fonction $M_*(t)$ appartientà $L^2]0,T[$. Cette dernière estimation permet de passer à la limite faible sur les termes $\epsilon u^\epsilon_x(a,t)$ et $\epsilon u^\epsilon_x(b,t)$. En effet, pour $\varphi \in L^2(]0,T[)$, on considère, pour $t\in]0,T[$,

$$\int_0^T \;\epsilon\; u^\epsilon_x(a,t)\;\varphi(t)\;dt\;. \tag{4.3}$$

On prolonge la fonction $\varphi$ sur $Q$ en posant

$$\varphi_\epsilon(x,t) \;=\; \begin{cases} \varphi(t)\;\frac{a+\epsilon-x}{\epsilon} & si\;\; a < x < a+\epsilon\;,\\ 0 & si\;\; x \;\ge\; a+\epsilon\;. \end{cases}$$

Remarquons que $\epsilon\varphi_{\epsilon,x}(x,t) = -\varphi(t)$ si $a < x < a+\epsilon$.
Alors

$$\int_0^T \epsilon\; u^\epsilon_x\;(a,t)\;\varphi(t)dt \;=\; -\int_0^T \Big(\int_I (\epsilon u^\epsilon_{xx}\varphi_e + \epsilon u^\epsilon_x \varphi_{\epsilon,x})dx\Big)\;dt$$

d'où

$$\left|\int_0^T \;\epsilon\; u^\epsilon_x(a,t)\;\varphi(t)\;dt\right| \;\le\; \int_0^T\; |\varphi(t)| \int_a^b\; (\epsilon|u^\epsilon_{xx}| + |u^\epsilon_x|)\;dx\;dt$$

et donc

$$\left|\int_0^T \;\epsilon\; u^\epsilon_x(a,t)\;\varphi(t)\;dt\right| \;\le\; \int_0^T\; |\varphi(t)|\;M_*(t)\;dt \;\le\; |\varphi|_{L^2(]0,T[)}|M_*|_{L^2(]0,T[)} \tag{4.4}$$

Ainsi, $\epsilon u^\epsilon_x(a,.)$ reste dans un borné de $L^2(]0,T[)$, et de toute suite on peut extraire une sous suite convergente pour la topologie faible de $L^2(]0,T[)$. On restreint maintenant la suite $\{\epsilon_n\}$ à une telle sous suite, et on note $\mu_a$ sa limite.

On procède de même en $x = b$ à partir de cette sous suite, et on va restreindre encore la sous suite $\{\epsilon_n\}$ de telle façon que $\epsilon u^\epsilon_x(b,.)$ converge faiblement dans $L^2(]0,T[)$ vers une limite notée $\mu_b$ .

## 5 La caractérisation

Soit $\epsilon$ un élément de la suite $\{\epsilon_n\}$ correspondant à la suite $\{u^{\epsilon_n}\}$ extraite précédemment. Soit $k\in\mathbb{R}$, $\varphi \in C^2(\overline{Q})$ telle que $\varphi(x,T) = 0$ pour tout $x\in I$ et vérifiant

$$\forall (x,t)\in\overline{Q}\;,\quad \varphi(x,t) \;\ge\; 0\;. \tag{5.1}$$

Soit $\eta > 0$. On multiplie (1.4) par $sg_\eta(u^\epsilon - k)$. En introduisant la fonction $F_\eta(u,k)$ définie par

$$\frac{\partial F_\eta}{\partial u}(u,k) \;=\; sg_\eta(u-k)\, f'(u) \;\; ; \quad F_\eta(k,k) = 0 \;,$$

on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(I_\eta(u^\epsilon - k)\right) \;+\; \frac{\partial}{\partial x}\left(F_\eta(u^\epsilon - k)\right) \;=\; \epsilon\; sg_\eta(u^\epsilon - k)\; u^\epsilon_{xx} \;. \tag{5.2}$$

On multiplie ensuite par la fonction $\varphi$, et on intègre par parties sur $Q$ pour obtenir

$$\begin{array}{c} \int_0^T \; F_\eta(B,k)\varphi(b,t)dt \;-\; \int_0^T F_\eta(A,k)\varphi(a,t)dt \\ -\int\int_Q \left(I_\eta(u^\epsilon - k)\varphi_t + F_\eta(u^\epsilon,k)\varphi_x\right)dxdt \;-\; \int_I I_\eta(u_0 - k)\varphi(x,0)dx \\ = \;-\epsilon\int\int_Q sg'_\eta(u^\epsilon - k)|u^\epsilon_x|^2\,\varphi\; dxdt \;-\epsilon\int\int_Q sg_\eta(u^\epsilon - k)\; u^\epsilon_x\,\varphi_x\; dxdt \\ +\epsilon\int_0^T sg_\eta(B-k)u^\epsilon_x(b)\varphi(b,t)dt \;-\; \epsilon\int_0^T sg_\eta(A-k)u^\epsilon_x(a)\varphi(a,t)dt. \end{array} \tag{5.3}$$

Pour $\eta$ fixé, on fait tendre $\epsilon$ $(=\epsilon_n)$ vers 0. Le passage à la limite dans le premier membre de (5.3) est immédiat, compte tenu de la convergence forte de $u^{\epsilon_n}$ vers $u$ . Dans le second membre, on utilise l'inégalité

$$\epsilon\; sg'_\eta(u^\epsilon - k)\; |u^\epsilon_x|^2\;\varphi(x,t) \;\geq\; 0 \;, \tag{5.4}$$

ce qui transformera (5.4) en une inégalité, l'estimation

$$\left|\epsilon\int\int_Q sg_\eta(u^\epsilon - k)\; u^\epsilon_x\;\varphi_x\; dxdt\right| \;\leq\; \epsilon\; T\; M(T)\; |\varphi_x|_{L^\infty(Q)} \;,$$

et les convergences faibles dans $L^2(0,T)$ de $\epsilon u^\epsilon_x(a,.)$ et $\epsilon u^\epsilon_x(b,.)$ vers $\mu_a$ et $\mu_b$ respectivement, pour obtenir à la limite

$$\begin{array}{c} \int_0^T \; F_\eta(B,k)\varphi(b,t)dt \;-\; \int_0^T F_\eta(A,k)\varphi(a,t)dt \\ -\int\int_Q \left(I_\eta(u-k)\varphi_t + F_\eta(u,k)\varphi_x\right)dxdt \;-\; \int_I I_\eta(u_0 - k)\varphi(x,0)dx \\ \leq\; \int_0^T sg_\eta(B-k)\mu_b(t)\varphi(b,t)dt \;-\; \int_0^T sg_\eta(A-k)\mu_a(t)\varphi(a,t)dt. \end{array} \tag{5.5}$$

On passe maintenant à la limite lorsque $\eta \longrightarrow 0$, en remarquant que

$$F_\eta(u,k) \;\longrightarrow\; sg(u-k)\;(f(u) - f(k))\;,$$

et on obtient, en utilisant le théorème de Lebesgue (convergence dominée) pour traiter les termes en $sg_\eta(A-k)$ et $sg_\eta(B-k)$,

$$\begin{array}{c} \int\int_Q \left(|u-k|\varphi_t + sg(u-k)(f(u)-f(k))\varphi_x\right) dxdt \;+\; \int_I |u_0 - k|\varphi(x,0)dx \;\geq \\ \int_0^T sg(B-k)(f(B)-f(k)-\mu_b(t))\varphi(b,t)dt - \int_0^T sg(A-k)(f(A)-f(k)-\mu_a(t))\varphi(a,t)dt \end{array} \tag{5.6}$$

Il reste à identifier $\mu_a$ et $\mu_b$. Pour cela, on prend une fonction $\varphi$ particulière, définie par

$$\varphi(x,t) \;=\; \theta(t)\;\rho_\delta(x)\;,\; x\in I,\; t\in ]0,T[$$

avec $\theta \in C^2(]0,T[)$ non négative, $\theta(0)=0$, $\theta(T)=0$ et $\rho_\delta \in C^2(I)$ non négative et décroissante, telle que $0<\delta<b-a$, $\rho_\delta(a)=1$ et $\rho_\delta(a+\delta)=0$. On passe à la limite lorsque $\delta \longrightarrow 0$. En notant $\gamma_a(t)$ la trace de $u(.,t)$ en $x=a$, on obtient

$$\begin{array}{c} \int\int_Q sg(u-k)(f(u)-f(k))\rho'_\delta(x)\theta(t)dxdt \quad\longrightarrow \\ \int_0^T \; sg(\gamma_a(t)-k)\;(f(\gamma_a(t))-f(k))\;\theta(t)\;dt \end{array}$$

De plus

$$\int\int_Q |u-k|\,\rho_\delta(x)\,\theta'(t)\,dt \longrightarrow 0\,,$$

et il reste l'inégalité

$$\int_0^T sg(\gamma_a(t)-k)(f(\gamma_a(t))-f(k))\theta(t)dt \;\leq\; \int_0^T sg(A-k)(f(A)-f(k)-\mu_a(t))\theta(t)dt,$$

qui va permettre d'obtenir $\mu_a(t)$. Comme le relation est vraie pour toute fonction $\theta \geq 0$, on a presque partout

$$sg(\gamma_a(t)-k)(f(\gamma_a(t))-f(k)) \;\leq\; sg(A(t)-k)(f(A(t))-f(k)-\mu_a(t)) \tag{5.7}$$

Prenons $k > \max(\gamma_a(t), A(t))$, puis $k < \min(\gamma_a(t), A(t))$, et il vient

$$f(\gamma_a(t))-f(k) \;=\; f(A)-f(k)-\mu_a(t)$$

d'où

$$\mu_a(t) \;=\; f(A(t)) \;-\; f(\gamma_a(t))\,. \tag{5.8}$$

De la même façon, en utilisant une fonction $\rho_\delta$ croissante, non négative, telle que $\rho_\delta(b-\delta) = 0$, $\rho_\delta(b) = 1$, on obtient à la limite lorsque $\delta \longrightarrow 0$,

$$\int_0^T sg(\gamma_b(t)-k)(f(\gamma_b(t))-f(k))\theta(t)dt \;\geq\; \int_0^T sg(B-k)(f(B)-f(k)-\mu_b(t))\theta(t)dt,$$

d'où,

$$sg(\gamma_b(t)-k)(f(\gamma_b(t))-f(k)) \;\geq\; sg(B(t)-k)(f(B(t))-f(k)-\mu_b(t)) \tag{5.9}$$

Prenons $k > \max(\gamma_b(t), B(t))$, puis $k < \min(\gamma_b(t), B(t))$, et il vient

$$f(\gamma_b(t))-f(k) \;=\; f(B)-f(k)-\mu_b(t)$$

d'où

$$\mu_b(t) \;=\; f(B(t)) \;-\; f(\gamma_b(t))\,. \tag{5.10}$$

Reprenons maintenant (5.6) en tenant compte de (5.8) et de (5.10). On obtient

$$\begin{array}{c} \int\int_Q (|u-k|\varphi_t + sg(u-k)(f(u)-f(k))\varphi_x)\,dxdt \;+\; \int_I |u_0-k|\varphi(x,0)dx \;\geq \\ \int_0^T sg(B-k)(f(\gamma_b(t))-f(k))\varphi(b,t)dt - \int_0^T sg(A-k)(f(\gamma_a(t))-f(k))\varphi(a,t)dt \end{array} \tag{5.11}$$

La formule (5.11) constitue une caractérisation de la solution recherchée de (1.1), (1.2), (1.3) dans $BV(Q) \cap L^\infty(Q)$.

De plus, en combinant (5.7) et (5.8), on obtient l'inégalité

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad (sg(A(t)-k) - sg(\gamma_a u(t)-k))\,(f(\gamma_a u(t)-f(k)) \;\geq\; 0$$

et en prenant $k$ entre $\gamma_a u(t)$ et $A(t)$,

$$sg(A(t)-\gamma_a u(t))\,(f(\gamma_a u(t)-f(k)) \;\geq\; 0\,. \tag{5.12}$$

D'où, en introduisant l'intervalle $L(t) = [\min(A(t), \gamma_a u(t)), \max(A(t), \gamma_a u(t))]$,

$$\operatorname*{Inf}_{k \in L(t)} \{sg(A(t) - \gamma_a u(t))\,(f(\gamma_a u(t) - f(k))\} = 0 \tag{5.13}$$

De la même façon, en combinant (5.9) et (5.10), on obtient l'inégalité

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad (sg(B(t) - k) - sg(\gamma_b(ut) - k))\,(f(\gamma_b u(t) - f(k)) \leq 0$$

et en prenant $k$ entre $\gamma_b u(t)$ et $B(t)$,

$$sg(B(t) - \gamma_b u(t))\,(f(\gamma_b u(t) - f(k)) \leq 0\,. \tag{5.14}$$

D'où, en introduisant l'intervalle $R(t) = [\min(B(t), \gamma_b u(t)), \max(B(t), \gamma_b u(t))]$,

$$\operatorname*{Sup}_{k \in R(t)} \{sg(B(t) - \gamma_b u(t))\,(f(\gamma_b u(t) - f(k))\} = 0\,. \tag{5.15}$$

Les conditions (5.13) et (5.15) correspondent à la véritable écriture des conditions (1.3), connues sous le nom de conditions BLN (Bardos, LeRoux, Nédélec, 1978).

# 6 L'unicité

On considère deux solutions de (1.1), (1.2), (1.3) caractérisées par (5.11), appartenant à $BV(Q) \cap L^\infty(Q)$ et notées respectivement $u$ et $v$. On prend la fonction $\varphi$ sous la forme $\varphi(x, y, t, s)$ avec $x \in I$, $y \in I$, $t \in ]0, T[$, $s \in ]0, T[$, à support inclus dans $Q$. Pour $(y, s)$ fixé, on écrit que $u$ satisfait (5.11) avec $k = v(y, s)$. Il vient

$$\int\int_Q (|u(x,t) - v(y,s)|\varphi_t + sg(u(x,t) - v(y,s))(f(u(x,t)) - f(v(y,s))\varphi_x)dxdt \geq 0\,.$$

De la même façon, on écrit que $v$ satisfait à (5.11) (en les variables $y$ et $s$), avec $k = u(x,t)$. Il vient

$$\int\int_Q (|v(y,s) - u(x,t)|\varphi_s + sg(v(y,s) - u(x,y))(f(v(y,s)) - f(u(x,t)))\varphi_y)dyds \geq 0\,.$$

On ajoute ces deux inégalités, pour obtenir ( ici $u = u(x,t)$, $v = v(y,s)$)

$$\int\int\int\int_{Q\times Q} \{|u - v|(\varphi_t + \varphi_s) + sg(u - v)(f(u - f(v))(\varphi_x + \varphi_y)\}dxdydtds \geq 0\,. \tag{6.1}$$

On construit maintenant une fonction $\varphi$ plus particulière. Soit $j$ une fonction réelle régulière, non négative, à support compact, telle que

$$\int_{\mathbb{R}} j(\xi)\,d\xi = 1\,.$$

On pose, pour $\nu \in \mathbb{N}$, $j_\nu(\xi) = \nu\, j(\nu\xi)$. On vérifie que pour toute fonction $w \in L^p(Q \times Q)$

$$\int\int\int\int_{Q\times Q} w(x,y,t,s)\,j_\nu(\frac{x-y}{2})\,j_\nu(\frac{t-s}{2})\,dxdydtds \longrightarrow 4\int\int_Q w(x,x,t,t)\,dx\,dt. \tag{6.2}$$

Soit $\psi \in C^2(Q)$ non négative, à support compact dans $Q$. On prend $\varphi$ de la forme

$$\varphi(x,y,t,s) \;=\; \varphi_\nu(x,y,t,s) \;=\; \psi(\frac{x+y}{2},\frac{t+s}{2})\; j_\nu(\frac{x-y}{2})\; j_\nu(\frac{t-s}{2})\;.$$

Alors

$$\varphi_x \;+\; \varphi_y \;=\; \frac{\partial\psi}{\partial x}\,(\frac{x+y}{2},\frac{t+s}{2})\; j_\nu(\frac{x-y}{2})\; j_\nu(\frac{t-s}{2})\;,$$

et

$$\varphi_t \;+\; \varphi_s \;=\; \frac{\partial\psi}{\partial t}\,(\frac{x+y}{2},\frac{t+s}{2})\; j_\nu(\frac{x-y}{2})\; j_\nu(\frac{t-s}{2})\;.$$

On obtient donc en passant à la limite sur (6.1), en utilisant (6.2),

$$\int\int_Q (|u-v|\psi_t + sg(u-v)f(u)-f(v))\psi_x)\;dx\;dt \;\geq\; 0, \tag{6.3}$$

où $u$ et $v$ sont toutes les deux des fonctions de $x$ et $t$.

On fait maintenant un choix particulier de fonction $\psi$, de la forme

$$\psi(x,t) \;=\; \theta(t)\;\chi_\delta(x)\;,$$

où $\theta \in C^2(]0,T[)$, non négative et à support compact dans $]0,T[$, et $\chi_\delta \in C^2(I)$ non négative, nulle en $x=a$ et en $x=b$, égale à 1 sur $]a+\delta, b-\delta[$ avec $\delta \in ]0, \frac{b-a}{2}[$, destiné à tendre vers zéro. On introduit cette fonction $\psi$ dans (6.3), pour obtenir, après passage à la limite en $\delta$,

$$\begin{gathered}\int\int_Q |u-v|\theta'(t)dx\;dt \;\geq \\ \int_0^T (-sg(\gamma_a u-\gamma_a v)(f(\gamma_a u(-f(\gamma_a v)) + sg(\gamma_b u-\gamma_b v)(f(\gamma_b u)-f(\gamma_b v))\;\theta(t)dt\;.\end{gathered} \tag{6.4}$$

Reprenons l'inégalité (5.12), avec

$$k \;=\; k(t) \;=\; \begin{cases} \gamma_a u(t) & \text{si } \gamma_a u(t) \text{ entre } \gamma_a v(t) \text{ et } A(t) \\ A(t) & \text{si } A(t) \text{ entre } \gamma_a u(t) \text{ et } \gamma_a v(t) \\ \gamma_a v(t) & \text{si } \gamma_a v(t) \text{ entre } A(t) \text{ et } \gamma_a u(t) \end{cases} \tag{6.5}$$

Il vient pour $k = A(t)$,

$$\begin{gathered} sg(\gamma_a u-\gamma_a v)(f(\gamma a u)-f(\gamma_a v)) \;= \\ sg(\gamma_a u - A)(f(\gamma_a u)-f(k)) \;+\; sg(\gamma_a v - A)(f(\gamma_a v)-f(k)) \;\leq\; 0\;,\end{gathered}$$

pour $k = \gamma_a v(t)$,

$$sg(\gamma_a u-\gamma_a v)(f(\gamma a u)-f(\gamma_a v)) \;=\; sg(\gamma_a u - A)(f(\gamma d a u)-f(k)) \;\leq\; 0,$$

et pour $k = \gamma_a u(t)$,

$$sg(\gamma_a u-\gamma_a v)(f(\gamma a u)-f(\gamma_a v)) \;=\; sg(\gamma_a v - A)(f(\gamma_a v)-f(k)) \;\leq\; 0.$$

On en déduit

$$sg(\gamma_a u - \gamma_a v)(f(\gamma_a u) - f(\gamma_a v)) \ \leq \ 0 \ . \tag{6.6}$$

De la même façon, à partir de (5.14) et un choix analogue de $k$, on obtient

$$sg(\gamma_b u - \gamma_b v)(f(\gamma_b u) - f(\gamma_b v)) \ \geq \ 0 \ . \tag{6.7}$$

En reportant les inégalités (6.6) et (6.7) dans (6.4), il reste finalement

$$\int\int_Q \ |u(x,t) - v(x,t)| \ \theta'(t) \ dt \ \geq \ 0 \ .$$

On prend maintenant une fonction $\theta$ particulière. Soit $t_0 \in ]0,T[, \ t_1 \in ]t_0, T[, \delta \in ]0, \dfrac{t_1 - t_0}{2}$ ; on prend $\theta(t) = \theta_\delta(t)$non négative sur $]0,T[$, nulle en dehors de $]t_0, t_1[$ et égale à 1 sur $]t_0 + \delta, t_1 - \delta[$, monotone sur $]t_0, t_0 + \delta[$ et sur $]t_1 - \delta, t_1[$. Le passage à la limite lorsque $\delta \longrightarrow 0$ donne, pour presque tout $t_0 \in ]0,T[, \ t_1 \in ]t_0, T[$ (points de Lebesgue)

$$\int_I |u(x,t_1) - v(x,t_1)| dx \ \leq \ \int_I |u(x,t_0) - v(x,t_0)| dx \ . \tag{6.8}$$

Il reste à faire tendre $t_0$ vers zéro, en évitant un ensemble de mesure nulle, et noter $t = t_1$, pour obtenir, pour presque tout $t \in ]0,T[$

$$\int_I \ |u(x,t) - v(x,t)| \ dx \ \leq \ \int_I |\gamma_0 u - \gamma_0 v| \ dx \ , \tag{6.9}$$

en notant respectivement $\gamma_0 u$ et $\gamma_0 v$ les traces de $u$ et de $v$ en $t = 0$. Il reste à vérifier que $\gamma_0 u = u_0 = \gamma_0 v$, puisque $u$ et $v$ satisfont à la même condition initiale (1.2). On prend dans (5.11) la fonction $\varphi$ de la forme

$$\varphi(x,t) \ = \ \theta_\delta(t) \ \rho(x) \ ,$$

où $\delta > 0, \theta_\delta \in C^2([0,T[), \ \theta_\delta(0) = 1, \ \theta_\delta \geq 0$, décroissante et nulle en $t = \delta$, $\rho \in C^2(I)$, $\rho \geq 0$. Après passage à la limite lorsque $\delta \longrightarrow 0$, il reste

$$\forall k \in \mathbb{R} \ \ \forall \rho \in C^2(I) \ \rho \geq 0 \quad \int_I (|u_0 - k| - |\gamma_0 u - k|) \ \rho(x) \ dx \ \geq \ 0 \ .$$

On en déduit

$$\forall k \in \mathbb{R} \ \ |u_0(x) - k| \ \geq \ |\gamma_0 u(x) - k| \ \text{ pour presque tout } x \in I.$$

En prenant $k > \max(\left|u_0\right|_{L^\infty(I)}, \left|\gamma_0\right|_{L^\infty(I)})$, puis $k < \min(\left|u_0\right|_{L^\infty(I)}, \left|\gamma_0\right|_{L^\infty(I)})$, on obtient $u_0 = \gamma_0 u$ presque partout sur $I$.
On en déduit immédiatement l'unicité.

# 7 L'enoncé du théorème

L'ensemble des résultats précédents se résume ainsi

**Théorème 7.1** *Le problème (1.1), (1.2), (1.3) (remplacé par (5.13), (5.15)) admet une solution unique $u \in BV(Q) \cap L^\infty(Q)$ et caractérisée par*

$$\int\int_Q (|u-k|\varphi_t + sg(u-k)(f(u)-f(k))\varphi_x)\, dxdt \;+\; \int_I |u_0 - k|\varphi(x,0)dx \;\geq$$
$$\int_0^T sg(B-k)(f(\gamma_b(t)) - f(k))\varphi(b,t)dt - \int_0^T sg(A-k)(f(\gamma_a(t)) - f(k))\varphi(a,t)dt$$

*pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C^2(\overline{Q})$, $\varphi \geq 0$, $\varphi(T) = 0$.*

Ce théorème peut se généraliser à l'équation

$$u_t \;+\; f(u,x,t)_x \;=\; g(u,x,t) \tag{7.1}$$

et les conditions initiales et aux limites (1.2), (1.3) et des hypothèses de régularité suffisantes sur $f$ et $g$. La caractérisation prend la forme, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C^2(\overline{Q})$, $\varphi \geq 0$, $\varphi(T) = 0$,

$$\int\int_Q \Big(|u-k|\varphi_t + sg(u-k)(f(u,x,t) - f(k,x,t))\varphi_x - sg(u-k)(g(u,x,t) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(k,x,t))\varphi\Big)dxdt \geq$$
$$\int_0^\infty \{sg(B-k)(f(\gamma_b u, x, t) - f(k,b,t))\varphi(b,t) - sg(A-k)(f(\gamma_a u, a, t) - f(k,a,t))\varphi(a,t)\,\}dt.$$

Il se généralise également à plusieurs dimensions d'espace.
Remarquons que, du fait de la présence du second membre $g(u,x,t)$ ou de la dépendance de $f$ en $x$ et $t$, les constantes ne sont plus des solutions particulières de (7.1).