Chapitre 3 : Suites réelles

(4 cours)

1 Points abordés par le cours

1.1 Definition des suites réelles

fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Theorème 5 *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est entièrement définie par la donnée de u_0 et par une relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Exemples particuliers : suites arithmétiques, géométriques
Eventuellement :

Theorème 6 *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est entièrement définie par la donnée de u_0 et par une relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f_n(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ où $f_n : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Exemples

1.2 Croissance, décroissance

Définition, exemples

1.3 Suites majorées, minorées, bornées

Définition, exemples

1.4 Suites convergentes et divergentes

Définition 2 *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite $l \in \mathbb{R}$ (on note $\lim_n u_n = l$) ssi pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $|u_n - l| \leq \varepsilon$.*

Remarque : on peut prendre des inégalités strictes au lieu de larges. Preuve en exercice
Exemples : suites constantes à partir d'un certain rang, suites géométriques à raison plus petite que 1..
Suites non convergentes = divergentes
Exemples : suites arithmétiques, suites bornées non convergentes ...

Theorème 7 *Une suite convergente est bornée.*

Preuve

Theorème 8 *Une suite croissante majorée (resp. déc. minorée) est convergente.*

Preuve

Theorème 9 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors $\lim_n u_n \leq \lim_n v_n$*

Preuve ; attention aux inégalités strictes et larges.

Theorème 10 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telles que*
i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le v_n \le w_n$,
ii) $\lim_n u_n = \lim_n w_n$
Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et $\lim_n v_n = \lim_n u_n = \lim_n w_n$

Preuve

Theorème 11 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes. Alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_n(u_n+v_n) = \lim_n u_n + \lim_n v_n$*

Preuve

Theorème 12 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes. Alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_n(u_nv_n) = \lim_n u_n \lim_n v_n$*

Preuve
Remarque : on en déduit que $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.5 Suite divergente, tendant vers $+\infty$

Suite tendant vers $+\infty$ (on note $\lim_n u_n = +\infty$) et $-\infty$.
Exemples
Différence entre suite non majorée et suite tendant vers $+\infty$ Exemples de suites bornées non convergentes

1.6 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition de la notion de suite extraite : $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une injection strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Theorème 13 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Alors il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.*

Preuve.
Soient $m < M$ un minorant et un majorant de la suite. On définit

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ge N, x \le u_n\}.$$

La partie A est non vide car $m \in A$ et majorée par M, car pour tout $x > M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < x$, donc $x \notin A$. Elle admet une borne supérieure. Soit $l \in [m, M]$ tel que $l = \sup A$. Construisons la fonction φ par récurrence.
Par définition de la borne supérieure, il existe $x \in A$, $l - 1 < x$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \ge N$, $l - 1 < x \le u_n$. Comme $l + 1 \notin A$, $l + 1$ vérifie

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists q \ge p, l + 1 > u_q.$$

Je choisis $p = N$ dans la propriété ci-dessus, et je pose $\varphi(0) = q$, entier dont l'existence pour cette valeur particulière de p est donnée ci-dessus. On a alors $l - 1 < u_{\varphi(0)} < l + 1$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Je suppose que $\varphi(k)$ a été défini. Par définition de la borne supérieure, il existe $x \in A$, $l - \frac{1}{k+2} < x$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \ge N$, $l - \frac{1}{k+2} < x \le u_n$. Comme $l + \frac{1}{k+2} \notin A$, $l + \frac{1}{k+2}$ vérifie

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists q \ge p, l + \frac{1}{k+2} > u_q.$$

Je choisis $p = \max(N, \varphi(k)+1)$ dans la propriété ci-dessus, et je pose $\varphi(k+1) = q$, entier dont l'existence pour cette valeur de p est donnée ci-dessus. On a alors $l - \frac{1}{k+2} < u_{\varphi(k+1)} < l + \frac{1}{k+2}$. et $\varphi(k+1) > \varphi(k)$. On a donc réalisé une injection strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(k)} - l| \leq \frac{1}{k+1}$. Donc la suite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

2 Exercices

2.1 Convergence et divergence

Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme u_n est donné par les formules suivantes, dire si elle est majorée, minorée, bornée, convergente, divergente, tendant vers $+\infty$ ou $+\infty$. Dans chaque cas, fournir une preuve rigoureuse.
i) $u_n = n^2$
ii) $a \in \mathbb{R}$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k$ (discuter suivant la valeur de a)
iii) $u_n = 2^n$
iv) $u_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + \sqrt{n} + 1}$

2.2 Suite récurrente

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = (1 - \frac{1}{2^2})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $u_{n+1} = u_n(1 - \frac{1}{(n+1)^2})$.
i) Calculer les premiers termes de la suite.
ii) Trouver l'expression du terme général de la suite (et le démontrer).
iii) Montrer que la suite converge et donner sa limite.

2.3 Suites récurrentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle donnée par u_0, avec $0 < u_0 < 2\pi$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + sin u_n$. Montrer que la suite est convergente et que sa limite est égale à π. (Indication: on étudiera le sens de variation de la suite $(u_n - \pi)_{n\in\mathbb{N}}$, en fonction de la valeur de u_0).

2.4 Convergence et divergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que
$$u_{n+1} = \frac{n^2 + u_n^2}{n^2 + 1},$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.
i) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors sa limite est égale à 1.
ii) On suppose que $u_0 = 1$. Montrer que la suite est constante.
iii) Montrer que l'on a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n - n^2)}{n^2 + 1},$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.
iv) On suppose que $0 \leq u_0 < 1$. Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 1$ et que la suite est convergente.
v) Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{N}_\star$ tel que $1 < u_q \leq q^2$. Montrer que l'on a $1 < u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier $n \geq q$.
vi) Supposons que $1 < u_0 \leq 7^{1/4}$. Montrer que l'on a $u_2 \leq 4$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

vii) Supposons $u_0 \geq 4$. Montrer par récurrence que l'on a $u_n \geq 16n^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}_\star$. En déduire que $\lim_n u_n = +\infty$.

2.5 Un peu de rédaction

Rédiger la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers $l \in \mathbb{R}$.

2.6 Un peu de rédaction

Rédiger la preuve du théorème du cours : toute suite croissante majorée converge.

2.7 Suites bornées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par sa valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et par la relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{u_n + 1}.$$

i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}^+$.
ii) Montrer qu'il existe un réel $r \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq r|u_n - \sqrt{3}|$.
iii) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{3}| \leq r^n|u_0 - \sqrt{3}|$.
iv) En déduire que la suite est convergente, et donner sa limite.

2.8 Suites et partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $a \in]1, +\infty[$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{E(a^n x)}{a^n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

2.9 Suites divergentes

Montrer que les suites
i) $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$
ii) $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$
divergent.

2.10 Suites données par une relation de récurrence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite donnée par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ telle que

$$u_{n+1} = \frac{n^2 + u_n^2}{n^2 + 1},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
i) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors elle est convergente et sa limite est égale à 1.
ii) On suppose que $u_0 = 1$. Montrer que la suite est constante.
iii) On suppose que $-1 \leq u_0 \leq 1$. Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$ et que la suite est convergente.

2.11 Suites extraites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée, telle qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ vérifiant : pour toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge, sa limite est l. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et que sa limite est l.

2.12 Critères de convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, telle que
i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$,
ii) la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et sa limite est un réel $l \in]-1,1[$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est nulle.

2.13 Suites données par une fraction rationnelle

Soit P le polynome réel défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$ et Q le polynome réel défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_q x^p$, avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. Montrer que la suite $(\frac{P(n)}{Q(n)})_{n\in\mathbb{N}}$:
i) converge vers 0 si $q > p$,
ii) converge vers $\frac{a_p}{b_q}$ si $p = q$,
iii) tend vers $+\infty$ si $p > q$ et a_p, b_q de même signe,
iv) tend vers $-\infty$ si $p > q$ et a_p, b_q de signes contraires.

2.14 Suites extraites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2.15 Suites et bornes

i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_\star$, $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$
ii)Montrer que les ensembles suivants sont majorés et minorés et en donner les bornes inférieures et supérieures :
$E_1 = \{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}\}$
$E_2 = \{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$
$E_3 = E_1 \cup E_2$.
iii) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_\star$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \sqrt{n+1} - 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$.
iv) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_\star}$ par $\forall n \in \mathbb{N}_\star, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} - \sqrt{n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_\star}$ est décroissante minorée.
v) On pose $F = \{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}_\star, x = u_n\}$. Montrer que F est minoré et majoré et donner sa borne supérieure.

2.16 Le nombre e est irrationnel

On définit les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!},$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

i) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ sont adjacentes, c'est à dire que la première est croissante, la seconde décroissante, et que leur différence converge vers 0.

ii) On note $e = \lim_n u_n = \lim_n v_n$. Montrer $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ par l'absurde de la façon suivante : supposer qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{N}_*^2$ tel que $e = \frac{p}{q}$. Montrer que pour tout $n \geq q$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{p}{q} - u_n = \frac{k}{n!}$. En montrant $u_n < e < u_n + \frac{1}{n!}$, montrer que $k = 0$. En déduire une contradiction.

2.17 Variations sur la moyenne de Cesaro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i.$
i) On suppose que $\lim_n u_n = 0$. Montrer que
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow |v_n| \leq \dfrac{1}{n+1}\left|\displaystyle\sum_{i=0}^{p} u_i\right| + \dfrac{\varepsilon}{2}.$
ii) En déduire que si $\lim_n u_n = 0$, alors $\lim_n v_n = 0$.
iii) On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_n u_n = l$. Montrer que $\lim_n v_n = l$ (on cherchera à se ramener au résultats démontrés en i) et ii)).
iv) Trouver un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non convergente vers 0, telle que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme ci-dessus à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente vers 0.
v) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_i$ soit une suite convergente. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\ c_i$. En utilisant $c_i = u_i - u_{i-1}$ pour tout $i \geq 1$ et le résultat de la question iii), montrer que $\lim_n w_n = 0$.

3 Correction d'exercices

Correction de l'exercice 2.5

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite $l \in \mathbb{R}$ (on note $\lim_n u_n = l$) ssi pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Ceci s'écrit aussi

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Correction de l'exercice 2.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante majorée. Alors l'ensemble $A = \{y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, y = u_n\}$ est majoré par un majorant de la suite. Il est non vide, car $u_0 \in A$. Il admet donc une borne supérieure. Soit $l = \sup A$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $y \in A$ tel que $l - \varepsilon < y$. Or, puisque $y \in A$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $y = u_N$. Donc $u_N > l - \varepsilon$. Comme la suite est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$, on a $u_n \geq u_N > l - \varepsilon$. Comme l est aussi un majorant de A, on a donc $l \geq u_n \geq l - \varepsilon$, donc $u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$.

Cela montre que la suite converge, et que sa limite est égale à l.

Correction de l'exercice 2.7

i) Prouvons la propriété par récurrence. Elle est vraie au rang $n = 0$. Supposons la vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n + 3 > 0$ et $u_n + 1 > 0$, donc $u_{n+1} > 0$, ce qui prouve la relation au rang $n + 1$.
ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{u_n + 3 - u_n\sqrt{3} - \sqrt{3}}{u_n + 1} = (u_n - \sqrt{3})\frac{1 - \sqrt{3}}{u_n + 1},$$

donc

$$|u_{n+1} - \sqrt{3}| = |u_n - \sqrt{3}|\frac{\sqrt{3} - 1}{u_n + 1},$$

Puisque $u_n \geq 0$, $\frac{\sqrt{3}-1}{u_n+1} \leq \sqrt{3} - 1$. En posant $r = \sqrt{3} - 1 \in]0, 1[$, on obtient donc le résultat demandé.
iii) Prouvons la propriété par récurrence. Elle est vérifiée au rang $n = 0$ (on a même une égalité). Supposons la vérifiée au rang n. On a alors

$$|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq r|u_n - \sqrt{3}| \leq r^{n+1}|u_0 - \sqrt{3}|,$$

ce qui prouve donc la relation au rang $n + 1$, et achève donc de montrer le résultat.
iv) Montrons que la suite converge vers $\sqrt{3}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+_\star$. On choisit $N \in \mathbb{N}$ pour que $r^N|u_0 - \sqrt{3}| \leq \varepsilon$ (il suffit de prendre $N = 0$ si $u_0 = \sqrt{3}$ et N le plus petit entier supérieur à $\frac{\ln\varepsilon - \ln|u_0 - \sqrt{3}}{\ln r}$ dans le cas général). On a alors, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - \sqrt{3}| \leq r^{n-N}\varepsilon \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve la convergence de la suite, et que sa limite est $\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 2.8

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+_\star$. On choisit $N \in \mathbb{N}$ pour que $a^{-N} \leq \varepsilon$ (il suffit de prendre pour N le plus petit entier supérieur ou égal à $-\frac{\ln\varepsilon}{\ln a}$). On a alors, pour tout $n \geq N$,

$$E(a^n x) \leq a^n x < E(a^n x) + 1,$$

donc en divisant par a^n,

$$u_n \leq x < u_n + a^{-n},$$

et donc

$$|x - u_n| < a^{-n} \leq a^{-N} \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve la convergence de la suite, et que sa limite est x.

Correction de l'exercice 2.9

i) Soit $l \in \mathbb{R}$. Je choisis $\varepsilon = 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$ quelconque. Soit N_0 le plus petit entier supérieur ou égal à $\sqrt{\max(l + 1, 0)}$. Soit $n = \max(N, N_0) + 1$. Alors $n^2 \geq l + 1$ donc $n^2 \notin [l - 1, l + 1]$. Donc il existe un

intervalle autour de l tel que pour tout rang entier, il existe un terme de la suite au delà de ce rang qui n'appartient pas à l'intervalle. Donc la suite ne converge pas.
ii) Soit $l \in \mathbb{R}$. Je choisis $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ quelconque. Comme $|(-1)^{N+1} - (-1)^N| = 2$, et que, pour tout $(a,b) \in ([l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}])^2$, $|a - b| \leq 1$, on ne peut pas avoir $((-1)^{N+1}, (-1)^N) \in ([l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}])^2$. Donc il existe $n \geq N$ tel que $(-1)^n \notin [l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}]$, et donc la suite diverge.

Correction de l'exercice 2.10

i) Soit $C \in \mathbb{R}_\star^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq C.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2 - 1}{n^2 + 1},$$

donc

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{C^2 + 1}{n^2 + 1}.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+$. On choisit $N \in \mathbb{N}_\star$ pour que $\frac{C^2+1}{(N-1)^2+1} \leq \varepsilon$ (il suffit de prendre pour N le plus petit entier supérieur ou égal à $\sqrt{\max(\frac{C^2+1}{\varepsilon} - 1, 0)} + 1$). On a alors, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - 1| \leq \frac{C^2 + 1}{(n-1)^2 + 1} \leq \frac{C^2 + 1}{(N-1)^2 + 1} \leq \varepsilon.$$

Cela montre bien la convergence de la suite, et que sa limite vaut 1.
ii) La preuve se fait par récurrence : on a $u0 = 1$. Si, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$, alors $u_{n+1} = 1$.
iii) Pour $u_0 \in [-1, 1]$, on a $u_0^2 \in [0, 1]$. On a donc $0 < u_1 \leq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}_\star$, si $u_n \in [0, 1]$, $0 < u_{n+1} = \frac{n^2 + u_n^2}{n^2+1} \leq 1$. Cela montre donc par récurrence que la suite est bornée. En appliquant le résultat de la question i), on obtient donc qu'elle est convergente et que sa limite est 1.

Correction de l'exercice 2.11

Remarquons tout d'abord que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'affirmer l'existence de sous-suites qui convergent. Remarquons aussi que si une suite converge, toutes les suites extraites de cette suite convergent, et ont la même limite que la suite elle-même.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, vérifiant les hypothèses de l'énoncé, ne converge pas vers l (noter que ceci n'exclut pas a priori que la suite puisse converger vers une autre valeur que l). Il existe alors $\varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+$, vérifiant la propriété suivante appelée dans la suite propriété (P) :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } u_n \notin [l - \varepsilon, l + \varepsilon].$$

Nous allons d'abord extraire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, notée $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \notin [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. Pour cela, on construit par récurrence, à l'aide de la propriété (P), une injection strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Au rang $k = 0$, on applique la propriété (P) pour $N = 0$. Il existe alors un entier $n_0 \geq 0$ tel que $u_{n_0} \notin [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. On pose alors $\varphi(0) = n_0$.
Supposons que l'on ait construit $\varphi(k) \in \mathbb{N}$, tel que $u_{\varphi(k)} \notin [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. On applique maintenant la propriété (P) pour $N = \varphi(k) + 1$. Il existe alors un entier $n_k \geq \varphi(k) + 1$ tel que $u_{n_k} \notin [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. On pose alors $\varphi(k + 1) = n_k$. On a bien alors construit, par récurrence, une injection strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $u_{\varphi(k)} \notin [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. On note alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite

définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_{\varphi(n)}$. Cette suite étant extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle est donc bornée. On peut donc appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass, qui permet d'affirmer l'existence d'une injection strictement croissante ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $(v_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. Cette suite étant extraite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sa limite ne peut pas être égale à l. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{\psi(n)} \notin [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. Mais cette suite est en fait la suite $(u_{\varphi(\psi(k))})_{k\in\mathbb{N}}$, et comme la composée des fonctions ψ et φ est aussi une injection strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, cette suite est extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc par hypothèse, comme elle est convergente, sa limite est égale à l. Il y a donc contradiction. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+$, l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$, alors $u_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, ce qui signifie bien que la suite entière, et pas seulement des suites extraites, est convergente et converge vers l.

Correction de l'exercice 2.12

Supposons tout d'abord que $l \in [0,1[$. Par convergence de la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$, nous déduisons, pour $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$, l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$, $|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l| \leq \frac{1-l}{2}$. Cela conduit donc à

$$\frac{3l-1}{2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1+l}{2},$$

et donc, en utilisant $l \geq 0$,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1+l}{2}.$$

On pose alors $r = \max(\frac{1+l}{2}, \frac{1}{2})$. On a $r \in]0,1[$ et

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq r.$$

Ceci permet donc de montrer par récurrence, que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|u_{N+k}| \leq |u_N| r^k$ (c'est vrai pour $k=0$, et si c'est vrai au rang k, la propriété $|u_{N+k+1}| \leq |u_{N+k}| r$ permet d'obtenir la relation au rang $k+1$). On en déduit donc que la suite $(|u_{N+k}|)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie $0 \leq |u_{N+k}| \leq |u_N| r^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui permet de conclure à sa convergence vers 0 puisqu'inférieure et supérieure à une suite tendant vers 0. Cela montre la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 (il suffit de décaler les indices de la valeur N dans la définition de la convergence de la suite).
Le cas $l \in]-1,0]$ se traite de manière symétrique, en déduisant, pour $\varepsilon = \frac{l+1}{2}$, l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$, $|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l| \leq \frac{1+l}{2}$. Le nombre r correspondant est alors égal à $r = \max(\frac{1-l}{2}, \frac{1}{2})$, qui est bien un élément de $]0,1[$.

Correction de l'exercice 2.13

Montrons tout d'abord que, pour tout $p \in \mathbb{N}_\star$, la suite $(n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Nous choisissons un entier N supérieur ou égal à $[\max(A,0)]^{1/p}$. On a alors, pour tout entier $n \geq N$, $n^p \geq \max(A,0) \geq A$, ce qui prouve le résultat annoncé. On en déduit donc, d'après le cours, que la suite réelle $(n^{-p})_{n\in\mathbb{N}_\star}$ converge vers 0.

Remarquons ensuite que, le nombre de racines du polynome Q étant inférieur ou égal à q, il existe un entier N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, $Q(n) \neq 0$. Nous considérons donc la suite $(\frac{P(n)}{Q(n)})_{n\in\mathbb{N}, n\geq N_0}$. Nous écrivons, pour tout $n \geq N_0$,

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_p}{b_q} n^{p-q} v_n,$$

où

$$v_n = \frac{1 + \frac{a_{p-1}}{n} + \ldots + \frac{a_0}{n^p}}{1 + \frac{b_{q-1}}{n} + \ldots + \frac{b_0}{n^q}}.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit comme le quotient de deux combinaisons de sommes de suites convergentes vers 0 d'après le résultat préliminaire, avec la constante 1. Elle est donc convergente et tend vers 1. Le résultat préliminaire permet alors de conclure les propriétés i), ii), iii) et iv) d'après les résultats du cours.

Correction de l'exercice 2.14

Montrons d'abord le résultat général suivant : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente de limite $l \in \mathbb{R}$ et soit ψ une injection strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Alors la suite extraite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

En effet, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi(n) \geq n$ (c'est vrai pour $n = 0$, et si c'est vrai au rang n, alors $\psi(n+1) > \psi(n) \geq n$ donc $\psi(n+1) \geq n+1$, donc la propriété est démontrée par récurrence). Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Comme $\psi(n) \geq n \geq N$, on a alors $|u_{\psi(n)} - l| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que la suite extraite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Nous revenons maintenant au problème initial : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite à la fois des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle est donc convergente, et sa limite est la même que celle de chacune des deux suites, qui ont donc la même limite. La suite $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite à la fois des suites $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle est donc convergente, et sa limite est la même que celle de chacune des deux suites, qui ont donc la même limite. Cela montre que les limites des trois suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont identiques. Notons $l \in \mathbb{R}$ cette limite commune.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_0$, $|u_{2n} - l| \leq \varepsilon$ et $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1$, $|u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$. On a alors, pour tout $n \geq \max(2N_0, 2N_1 + 1)$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$ (car n est pair ou impair). Cela prouve la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l.

Correction de l'exercice 2.15

i) Soit $n \in \mathbb{N}_\star$. On a, en multipliant par la quantité conjuguée (qui est non nulle),

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

donc

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Comme $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, on a $2\sqrt{n+1} > \sqrt{n} + \sqrt{n+1} > 2\sqrt{n}$ donc

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

ii) Soit $x \in E_1$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$, donc $x \leq 0$. L'ensemble E_1 est donc majoré par 0. Pour $n = 0$, on a $x = -1$, donc $-1 \in E$ et pour $n \geq 1$, on a d'après i), $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} \geq -\frac{1}{2\sqrt{n}} \geq -\frac{1}{2}$, donc $x \geq -1$. Donc E_1 est minoré par -1. Comme de plus $-1 \in E_1$, on en déduit que $-1 = \inf E_1$.

Montrons que $0 = \sup E_1$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+$. Choisissons $n \in \mathbb{N}_\star$ tel que $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$: il suffit de prendre $n > \frac{1}{4\varepsilon^2}$, ce qui est possible par propriété d'Archimède. On a alors, d'après i),

$$-\varepsilon < -\frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n+1}.$$

On a donc trouvé un élément de E_1 supérieur à $0 - \varepsilon$. Comme 0 est un majorant de E_1, on en déduit donc que 0 est sa borne supérieure.
On remarque que $E_2 = \{x \in \mathbb{R}, \exists y \in E_1, x = -y\}$. Donc, comme il a été remarqué en cours, un majorant de E_2 est 1 et $\sup E_2 = -\inf E_1 = 1$, un minorant de E_2 est 0 et $\inf E_2 = -\sup E_1 = 0$.
Tous les éléments de E_3 sont donc compris entre -1 et 1, qui sont deux éléments de E_3. Donc E_3 est majoré, minoré, $\sup E_3 = 1$ et $\inf E_3 = -1$.
iii) Montrons la relation par récurrence. On a, en appliquant i) pour $n = 1$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \sqrt{2} - 1 \leq \frac{1}{2},$$

ce qui est la relation demandée au rang $n = 1$. Supposons que pour $n \in \mathbb{N}_\star$, la relation

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \sqrt{n+1} - 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

soit vérifiée. Alors, en lui ajoutant la relation i) écrite pour $n + 1$ au lieu de n, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{k}} + \frac{1}{2\sqrt{n+2}} \leq \sqrt{n+1} - 1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} + \frac{1}{2\sqrt{n+1}},$$

ce qui montre bien la relation au rang $n + 1$.
iv) Soit $n \in \mathbb{N}_\star$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n}.$$

Le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est négatif d'après i), donc $u_{n+1} < u_n$, ce qui prouve que la suite est strictement décroissante. Elle est donc majorée par $u_1 = -\frac{1}{2}$. D'après iii), en retranchant $\sqrt{n}$, on a

$$\sqrt{n+1} - 1 - \sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} - \sqrt{n},$$

donc $-1 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 1 \leq u_n$. La suite est donc minorée par -1.
v) En appliquant iv), on montre donc que F est majoré par $-\frac{1}{2}$ et minoré par -1. Comme $-\frac{1}{2} = u_1 \in F$, on en déduit que $-\frac{1}{2} = \sup F$.

Correction de l'exercice 2.17

i) Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$, $|u_n| \leq \varepsilon/2$. On a alors

$$|v_n| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} u_i \right| \leq \frac{1}{n+1} \left| \sum_{i=0}^{p} u_i \right| + \frac{1}{n+1} \left| \sum_{i=p+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \right|,$$

donc

$$|v_n| \leq \frac{1}{n+1} \left| \sum_{i=0}^{p} u_i \right| + \frac{n-p}{n+1} \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui fournit donc

$$|v_n| \leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{i=0}^{p} u_i\right| + \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui est le résultat demandé.
ii) La grandeur $|\sum_{i=0}^{p} u_i|$ étant donnée, on peut choisir n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{1}{n+1}|\sum_{i=0}^{p} u_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Il suffit alors de prendre $n \geq \max(n_0, p)$ pour obtenir, $|v_n| \leq \varepsilon$. Cela montre donc que $\lim_n v_n = 0$.
iii) Il suffit de poser $w_n = u_n - l$ et d'appliquer i) et ii).
iv) Un exemple est $u_n = (-1)^n$.
iv) En utilisant $c_i = u_i - u_{i-1}$ pour tout $i \geq 1$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation

$$w_n = u_n - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u_i,$$

qui tend donc vers $\lim_n u_n - \lim_n u_n = 0$.