SVM 201
CALCUL DIFFÉRENTIEL

Alain Yves LE ROUX

1 Rappels sur la continuité

On considère un intervalle fermé borné $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, et une fonction f définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.

Définition 1.1 *La fonction f est continue en x_0 lorsque*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \textit{tels que, si } x \in I \textit{ et } |x - x_0| < \eta \textit{ alors } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \ .$$

Cette définition signifie qu'il est toujours possible de profiler un rectangle de la forme $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\times]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[$, autour du point $(x_0, f(x_0))$ de telle façon que le graphe de la fonction f y rentre et en sort par les cotés verticaux. Lorsque $x_0 = a$, ce rectangle se limite bien entendu à $]a, a + \eta[\times]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[$, et lorsque $x_0 = b$, il se limite à $]b - \eta, b[\times]f(b) - \epsilon, f(b) + \epsilon[$.

Lorsque f est continue en tout point $x_0 \in I$, on dit que f est continue sur I. Dans ce cas, on note

$$M = \sup_{x \in I} f(x) \ , \ m = \inf_{x \in I} f(x) \ .$$

et ces quantités sont finies (admis). Le théorème suivant assure que ces valeurs M et m sont effectivement réalisées par des valeurs de $f(x)$ sur I. On dit que le Sup et l'Inf sont atteints.

Théorème 1.2 *Soit f une fonction continue sur I. Alors*

$$\begin{array}{l} \exists \ x_M \in I \ \ f(x_M) = M \\ \exists \ x_m \in I \ \ f(x_m) = m \ . \end{array}$$

Démonstration : Si ce n'est pas le cas pour le Sup, on aura $f(x) < M$ pour tout $x \in I$. Ainsi la fonction $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ est continue sur I. On pose $M_1 = \sup_{x \in I} g(x)$. On a $\dfrac{1}{M - f(x)} \leq M_1$ pour tout $x \in I$. Donc $f(x) \leq M - \dfrac{1}{M_1}$ pour tout $x \in I$, d'où $M \leq M - \dfrac{1}{M_1}$ ce qui est absurde. La démonstration est analogue pour l'Inf.

Théorème 1.3 (Théorème de la valeur intermédiaire) *Soit f une fonction continue sur I, et $d \in [m, M]$. Alors*

$$\exists \ c \in I \ \ \textit{tel que } f(c) = d \ . \tag{1.1}$$

Démonstration : Si au contraire $\forall x \in I \ f(x) \neq d$, alors on est devant l'un des deux cas suivants. Ou bien $\forall x \in I \ f(x) < d$, et alors $M = f(x_M) < d$, ou bien $\forall x \in I \ f(x) > d$, et alors $m = f(x_m) > d$. Ceci est contraire à l'hypothèse $d \in [m, M]$, donc absurde.

Typeset by the TEX-preprocessor PreTEX

2 Les fonctions dérivables

Soit $I = [a, b]$ et f une fonction continue sur I. Soit $x_0 \in I$.

Définition 2.1 *Lorsque la quantité*

$$l(x_0) \;=\; \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe, elle est appelée dérivée de f en x_0 ; on note dans ce cas $f'(x_0) = l(x_0)$ et on dit que f est dérivable en x_0

On utilise aussi la notation $\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$.

Proposition 2.2 *La fonction f est dérivable en x_0, de dérivée $f'x_0)$ si et seulement si, pour tout h réel tel que $x_0 + h \in I$ on a*

$$f(x_0 + h) \;=\; f(x_0) \;+\; h\, f'(x_0) \;+\; h\, \epsilon(h)\,, \tag{2.1}$$

où la quantité $\epsilon(h)$ tend vers zéro lorsque h tend vers zéro.

Démonstration : On pose, pour $h \neq 0$,

$$\epsilon(h) \;=\; \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \;-\; f'(x_0)\,.$$

Si f est dérivable en x_0, alors $\epsilon(h)$ tend effectivement vers zéro avec h, et on obtient bien (2.1). Réciproquement, sachant que $\epsilon(h)$ tend vers zéro cette expression assure que $f'(x_0)$ est bien la dérivée de f en x_0.

Si la fonction f est dérivable en tout point $x \in I$, on peut définir une fonction f' sur I de valeurs $f'(x)$. Cette fonction est appelée dérivée de f.

Proposition 2.3 *On suppose f dérivable sur I. Si $x_M \in]a, b[$, alors $f'(x_M) = 0$; si $x_m \in]a, b[$, alors $f'(x_m) = 0$. Si $x_M = a$, alors $f'(a) \leq 0$; si $x_M = b$, alors $f'(b) \geq 0$; si $x_m = a$ alors $f'(a) \geq 0$; si $x_m = b$ alors $f'(b) \leq 0$.*

Démonstration : On utilise (2.1). Ainsi, pour $x_M \in]a, b[$,

$$f(x_M + h) \;=\; f(x_M) \;+\; h\, f'(x_M) \;+\; h\, \epsilon(h) \;\leq\; f(x_M) \;\;,$$

donc $h(f'(x_M) + \epsilon(h)) \leq 0$. On prend $h > 0$ et on divise par h puis on fait tendre h vers zéro. On obtient $f'(x_M) \leq 0$. On prend ensuite $h < 0$, et on procéde de la même façon pour obtenir $f'(x_M) \geq 0$. D'où $f'(x_M) = 0$.
Si $x_M = a$ ou $x_M = b$, on ne dispose que d'une seule inégalité.
Pour $x_m \in]a, b[$,

$$f(x_m + h) \;=\; f(x_m) \;+\; h\, f'(x_m) \;+\; h\, \epsilon(h) \;\geq\; f(x_m) \;\;,$$

donc $h(f'(x_m) + \epsilon(h)) \geq 0$. On prend $h > 0$ et on divise par h puis on fait tendre h vers zéro. On obtient $f'(x_m) \geq 0$. On prend ensuite $h < 0$, et on procéde de la même façon pour obtenir $f'(x_m) \leq 0$. D'où $f'(x_m) = 0$.
Si $x_m = a$ ou $x_m = b$, on ne dispose que d'une seule inégalité.

Théorème 2.4 (dérivation de fonctions composées) *Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans un intervalle J de $\mathbb{R}$, et g une fonction définie sur J, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose f dérivable en $x_0 \in I$ et g dérivable en $y_0 = f(x_0)$. Alors*

$$(g \circ f)'(x_0) \;=\; g'(f(x_0))\, f'(x_0)\,.$$

Démonstration : On a, d'après (2.1)

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) \;+\; h\, f'(x_0) \;+\; h\, \epsilon_1(h) \\ g(y_0 + k) &= g(y_0) \;+\; k\, g'(y_0) \;+\; h\, \epsilon_2(k) \end{aligned}$$

où $\epsilon_1(h) \longrightarrow 0$ si $h \longrightarrow 0$, et $\epsilon_2(k) \longrightarrow 0$ si $k \longrightarrow 0$.
On prend $k = f(x_0 + h) - f(x_0) = h(f'(x_0) + \epsilon_1(h))$, qui tend vers zéro si $h \longrightarrow 0$. Alors

$$g(f(x_0 + h)) \;=\; g(f(x_0) + k) \;=\; g(f(x_0)) + kg'(f(x_0)) + k\epsilon_2(k),$$

d'où, en utilisant l'expression de k en fonction de k,

$$g(f(x_0 + h)) \;=\; g(f(x_0)) \;+\; h\; g'(f(x_0))f'(x_0) \;+\; h\; \epsilon(h)$$

où on a posé $\epsilon(h) = g'(f(x_{\grave{a}}))\epsilon_1(h) + f'(x_0)\epsilon_2(k) + \epsilon_1(h)\epsilon_2(k)$ qui tend vers zéro lorsque h (donc aussi k) tend vers zéro. On en déduit le théorème en appliquant la proposition 2.2.

On déduit de ce théorème que l'opération de dérivation est une application linéaire : si f et g sont définies sur I, dérivables en x_0, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$, ainsi que les deux formules suivantes

$$(fg)'(x_0) \;=\; f'(x_0)\, g(x_0) \;+\; f(x_0)\, g'(x_0)\,,$$

et si $g(x_0) \neq 0$,

$$(\frac{f}{g})'(x_0) \;=\; \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{g(x_0)^2}\,.$$

On obtient la première formule en dérivant l'identité

$$fg \;=\; \frac{1}{4}\left((f+g)^2 \;-\; (f-g)^2\right)\,,$$

puis en utilisant $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ et le théorème 2.4. La seconde formule se déduit de la première, en utilisant $\frac{d}{dx}(1/x) = -\frac{1}{x^2}$.

3 La formule des accroissements finis

Soit f une fonction définie sur $I = [a, b]$.

Théorème 3.1 *On suppose f dérivable en tout point de I. On a les deux versions suivantes de la formule des accroissements finis.*
Soit $x_0 \in I$, $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$; alors il existe un nombre $\theta(h) \in]0,1[$ tel que

$$f(x_0 + h) \; = \; f(x_0) \; + \; h\, f'(x_0 + \theta(h)h) \; . \tag{3.1}$$

Soit $x, y \in I$ avec $x < y$; alors il existe un nombre $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) \; = \; (y - x)\, f'(c) \; . \tag{3.2}$$

Démonstration : On commence par démontrer (3.2) dans le cas où $f(y) = f(x)$. Il suffit alors de trouver $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = 0$. On est dans l'un (au moins) des trois cas suivants :

si $\forall \xi \in]x, y[$ $f(\xi) = f(x)$ $(= f(y))$, alors f est constante, donc de dérivée nulle sur $]x, y[$ et n'importe quel $c \in]x, y[$ convient.

si $\exists \xi \in]x, y[$ tel que $f(\xi) > f(x)$, alors f admet un maximum sur $[x, y]$ réalisé en un point $c \in]x, y[$ où nécessairement la dérivée $f'(c)$ est nulle.

si $\exists \xi \in]x, y[$ tel que $f(\xi) < f(x)$, alors f admet un minimum sur $[x, y]$ réalisé en un point $c \in]x, y[$ où nécessairement la dérivée $f'(c)$ est nulle.

On a donc obtenu (3.2) dans le cas $f(y) = f(x)$. Pour $f(x) \neq f(y)$, on pose

$$g(\xi) \; = \; f(\xi) \; - \; (\xi - x)\, \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \; ,$$

qui vérifie $g(x) = g(y) = f(x)$. Donc $\exists c \in]x, y[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$, et on en déduit (3.2).

On pose ensuite, dans (3.2), $y = x_0 + h$, $x = x_0$ si $h > 0$ ou $y = x_0$, $x = x_0 + h$ si $h < 0$, et on obtient immédiatement (3.1) avec $\theta(h) = \dfrac{y - c}{y - x} \in]0, 1[$.

Remarque : On déduit de la formule des accroissements finis que si f est dérivable et croissante sur I, alors $\forall x \in I$ $f'(x) \geq 0$, et si f est dérivable et décroissante sur I, alors $\forall x \in I$ $f'(x) \leq 0$.

Le théorème suivant est très utile dans certains calculs de limites.

Théorème 3.2 *Soit f, g deux fonctions définies et dérivables sur I, de dérivées f' et g' continues sur I, telles que en un point $x_0 \in I$, $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$, $g'(x_0) \neq 0$. Alors*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0, x \in I} \frac{f(x)}{g(x)} \; = \; \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \; . \tag{3.3}$$

Démonstration : Soit $x \in I$ destiné à tendre vers x_0. On pose $h = x - x_0$ qui tend vers zéro lorsque $x \longrightarrow x_0$. Alors, en appliquant la formule des accroissements finis à f ($\theta(h)$ est ici noté $\theta_1 \in]0, 1[$) et à g ($\theta(h)$ est ici noté $\theta_1 \in]0, 1[$), il vient

$$\frac{f(x)}{g(x)} \; = \; \frac{f(x_0) + hf'(x_0 + \theta_1 h)}{g(x_0) + hg'(x_0 + \theta_2 h)} \; = \; \frac{f'(x_0 + \theta_1 h)}{g'(x_0 + \theta_2 h)} \; \longrightarrow \; \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{si } x \longrightarrow x_0.$$

4 La formule de Taylor

On considére toujours l'intervalle I, et une fonction f définie sur I, que l'on suppose continue et dérivable sur I. Si cette dérivée f' est elle même dérivable sur I, on note $f'' = (f')'$, qu'on appelle dérivée seconde de f. On peut ensuite définir, si elle existe, la dérivée troisième, puis la dérivée d'ordre n ($n \geq 2$, entier) $f^{(n)}$ comme la dérivée de la dérivée d'ordre $n-1$, conformément à la formule $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$. La connaissance des valeurs des dérivées successives en un point x_0 permet d'analyser localement le comportement d'une fonction près de ce point, grâce à la formule de Taylor.

Théorème 4.1 (Formule de Taylor) *Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la fonction f est $n+1$ fois dérivable sur I. Soit $x_0 \in I$, h réel tel que $x_0 + h \in I$. Alors il existe un nombre $\theta = \theta(h, n) \in]0,1[$ tel que*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h) \tag{4.1}$$

Notons que la formule de Taylor peut aussi s'écrire

$$f(x_0+h) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}\, f^{(k)}(x_0) \;+\; \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(x_0+\theta h)\ , \tag{4.2}$$

en convenant que $f^{(0)} = f$ et $0! = 1$. De plus, si f est un polynôme de degré n, sa dérivée d'ordre $n+1$ est une constante et la valeur de θ n'a plus de signification.

Démonstration : On fixe $x = x_0 + h$, et on définit la fonction g sur I par

$$g(t) = f(x) - f(t) - (x-t)f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!}f''(t) - \ \ldots\ - \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)\ ,$$

ou encore

$$g(t) \;=\; f(x) \;-\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!}\, f^{(k)}(t)\ .$$

On note que $g(x) = 0$ et $g(x_0) \;=\; f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0) - \ldots. - \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$ .Il suffit maintenant de montrer qu'il existe bien $\theta \in]0,1[$ tel que $g(x_0) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)$.

On pose $F(t) = g(t) - \left(\frac{x-t}{h}\right)^{n+1} g(x_0)$. On a $F(x_0) = 0$ et $F(x_0+h) = F(x) = g(x) = 0$. Donc, d'après la formule des accroissements finis, g et F étant dérivables, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $F'(x_0+\theta h) = 0$. Or $F'(t) = g'(t) + \frac{n+1}{h}\left(\frac{x-t}{h}\right)^n g(x_0)$ et

$$g'(t) \;= \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\, f^{(k)}(t) \;-\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) \;=\; -\,\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ .$$

On en déduit

$$\frac{(x-x_0-\theta h)^n}{h^n}\ \frac{n+1}{h}\ g(x_0) \;=\; \frac{(x-x_0-\theta h)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(x_0+\theta h)\ ,$$

d'où le résultat.

5 Les développements limités

La formule de Taylor (4.1) à l'ordre n, associée à une fonction f en un point $x_0 \in I = [a, b]$, fait apparaitre une partie polynomiale, de degré $\leq n$ et un reste qui tend vers zéro plus vite que $(x - x_0)^n$ lorsque x tend vers x_0, $x \in I$. On peut ainsi noter

$$f(x) \; = \; p_n(x) \; + \; (x - x_0)^n \, \epsilon_n(x - x_0) \;\; où \; \epsilon_n(x - x_0) \longrightarrow 0 \; si \; x \longrightarrow x_0 \, ,$$

où

$$p_n(x) \; = \; f(x_0) \; + \; (x - x_0) f'(x_0) \; + \; \frac{(x - x_0)^2}{2!} \; + \; ... \; + \; \frac{(x - x_0)^n}{n!} \, f^{(n)}(x_0) \tag{5.1}$$

et

$$\epsilon_n(x - x_0) \; = \; \frac{(x - x_0)}{(n + 1)!} \, f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \; , \quad avec \; 0 < \theta < 1 \; .$$

On a bien $\epsilon_n(x - x_0) \longrightarrow 0$ si $x \longrightarrow x_0$.

On veut généraliser cette représentation d'une fonction f au voisinage d'un point x_0, même lorsque les conditions requises pour assurer un développement de Taylor ne sont pas assurées, notamment l'hypothèse sur l'existence de la dérivée d'ordre $n + 1$ de f définie sur I.

Définition 5.1 *Le développement limité d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) d'une fonction f définie sur I, en un point $x_0 \in I$, est un polynôme $p_n(x)$ de degré $\leq n$ tel que*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0, \, x \in I} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n} \; = \; 0 \; . \tag{5.2}$$

On note $\epsilon(x - x_0) = \dfrac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n}$, ce qui conduit à l'expression

$$f(x) \; = \; p_n(x) \; + \; (x - x_0)^n \, \epsilon(x - x_0) \; ,$$

également appelée, par abus de langage, développement limité d'ordre n de f en x_0.

Proposition 5.2 *Le développement limité d'ordre n d'une fonction f en un point $x_0 \in I$ est unique.*

Démonstration : Supposons que l'on ait deux développements $p_n(x)$ et $q_n(x)$. Alors $r_n(x) = q_n(x) - p_n(x)$ vérifie

$$\frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} \; = \; \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n} \; - \; \frac{f(x) - q_n(x)}{(x - x_0)^n} \; \longrightarrow \; 0 \;\; si \; x \longrightarrow x_0 \, .$$

Or $r_n(x)$ est un polynome de la forme $r_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n$. On aura $r_n(x) \longrightarrow 0$ si $x \longrightarrow x_0$, donc $a_0 = 0$, puis $(x - x_0) r_n(x) \longrightarrow 0$ si $x \longrightarrow x_0$ donc $a_1 = 0$, puis de proche en proche $(x - x_0)^k r_n(x) \longrightarrow 0$ si $x \longrightarrow x_0$ donc $a_k = 0$, jusqu'à $k = n$. D'où $r_n(x) = 0$ et l'unicité.

6 Les développements limités classiques

Prenons la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ et $x_0 = 0$ (pour l'intervalle I tout intervalle fermé contenant 0 conviendra). On sait que pour tout entier k, $f^{(k)}(x) = e^x$, donc $f^{(k)}(0) = 1$, et le développement à l'ordre n est le polynôme

$$p_n(x) \;=\; 1 \;+\; x \;+ \frac{x^2}{2!} \;+\; \frac{x^3}{3!} \;+\; ... \;+\; \frac{x^n}{n!} \;\; .$$

On ecrit plutot

$$e^x \;=\; 1 \;+\; x \;+\; \frac{x^2}{2!} \;+\; \frac{x^3}{3!} \;+\; ... \;+\; \frac{x^n}{n!} \;+\; x^n\,\epsilon(x) \text{ où } \epsilon(x) \longrightarrow 0 \text{ si } x \longrightarrow O \; . \tag{6.1}$$

Dans toute la suite, la notation $\epsilon(x)$ symbolise de façon générale une fonction de x qui tend vers zéro lorsque x tend vers zéro. Bien entendu, cette fonction $\epsilon(x)$ varie d'une fonction à l'autre.
On peut déduire de (6.1) le développement limité de la fonction $f(x) = e^{\lambda x}$ en $x = 0$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Il est de la forme

$$e^{\lambda x} \;=\; 1 \;+\; \lambda x \;+\; \frac{\lambda^2 x^2}{2!} \;+\; ... \;+\; \frac{\lambda^n x^n}{n!} \;+\; x^n\,\epsilon(x) \; .$$

Ainsi, en prenant $\lambda = -1$,

$$e^{-x} \;=\; 1 \;-\; x \;+\; \frac{x^2}{2!} \;-\; \frac{x^3}{3!} \;+\; ... \;+\; \frac{(-1)^n x^n}{n!} \;+\; x^n\,\epsilon(x) \; ,$$

et pour $\lambda = i$,

$$e^{ix} = 1 \;+ix \;-\frac{x^2}{2!} \;-i\frac{x^3}{3!} \;+\; ... \;+(-1)^p\,\frac{x^{2p}}{(2p)!} \;+\; i(-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \;+\; \frac{i^n x^n}{n!} \;+\; x^n\,\epsilon(x) \; .$$

On peut en déduire, en séparant les parties réelles et imaginaires

$$\cos(x) \;=\; 1 \;-\; \frac{x^2}{2!} \;+\; \frac{x^4}{4!} \;+\; ... \;+\; (-1)^p\,\frac{x^{2p}}{(2p)!} \;+\; x^{2p+1}\epsilon(x) \; ,$$

$$\sin(x) \;=\; x \;-\; \frac{x^3}{3!} \;+\; \frac{x^5}{5!} \;+\; ... \;+\; (-1)^p\,\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \;+\; x^{2p+2}\epsilon(x) \; .$$

On considère maintenant la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$ sur un intervalle réel I, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $\alpha < 0$ on devra exiger $-1 \notin I$. En dérivant à l'ordre k, on obtient

$$f^{(k)}(x) \;=\; \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)\;(1+x)^{\alpha-k} \; ,$$

d'où $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)$. La formule de Taylor aboutit au développement suivant de f en zéro

$$(1+x)^\alpha \;=\; 1 \;+\; \alpha x \;+\; \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 \;+\; ... \;+\; \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n \;+\; x^n\,\epsilon(x) \; .$$

On obtient en particulier

$$\frac{1}{1-x} \;=\; 1 \;+\; x \;+\; x^2 \;+\; \dots \;+\; x^n \;+\; x^n\,\epsilon(x)\;,$$

$$\frac{1}{1+x} \;=\; 1 \;-\; x \;+\; x^2 \;+\; \dots \;+\; (-1)^n\,x^n \;+\; x^n\,\epsilon(x)\;. \tag{6.2}$$

7 Les opérations sur les développements limités

Les développements limités sont des polynômes ; on peut donc envisager d'utiliser des opérations algébriques analogues à celles que l'on effectue classiquement sur les polynômes : somme, produit, division, ainsi que des opérations d'intégration ou de dérivation.

On note simplement que l'on pourra intégrer les termes de degré supérieur à $n+1$ dans le terme de reste $\epsilon(x)$. Par exemple, le produit des deux développements limités d'ordre n

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \;\;,\quad q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$$

conduit au dévelopement suivant

$$p(x)q(x) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + \dots + \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) x^n \;+\; x^n\,\epsilon(x)\;.$$

Pour la division, suivant les techniques classiques de puissances croissantes, on s'arrête de manière analogue à l'ordre n.

Théorème 7.1 *On suppose f continue sur I, admettant en x_0 un développement limité $p_n(x)$. Soit F une primitive de f. Alors F admet un développement limité d'ordre $n+1$ en x_0 donné par*

$$P_{n+1}(x) \;=\; F(x_0) \;+\; \int_{x_0}^{x} p_n(\xi)\,d\xi\;\;.$$

Démonstration : On a, pour tout ξ entre x_0 et x, $f(\xi) = p_n(\xi) + (\xi - x_0)^n \epsilon(\xi - x_0)$, où, par composition de fonctions, $\epsilon(\xi - x_0)$ est une fonction continue de ξ. On peut donc intégrer en ξ, entre x_0 et x, pour obtenir

$$F(x) - F(x_0) \;=\; \int_{x_0}^{x} p_n(\xi)\,d\xi \;+\; \int_{x_0}^{x} (\xi - x_0)^n\;\epsilon(\xi - x_0)\,d\xi\;.$$

Il reste à évaluer cette dernière intégrale. On fait le changement de variable $t = \dfrac{\xi - x_0}{x - x_0}$ (donc $d\xi = (x - x_0)dt$) de façon à récupérer une intégrale sur $[0,1]$. On obtient

$$\int_{x_0}^{x} (\xi - x_0)^n\;\epsilon(\xi - x_0)\,d\xi \;=\; (x - x_0)^{n+1} \int_0^1 t^n \epsilon(t(x - x_0))dt\;.$$

On pose $\eta(x - x_0) = \sup\limits_{0<t<1} \left|\epsilon(t(x - x_0))\right|$, qui tend vers zéro si x tend vers x_0, et on obtient

$$\left|\int_0^1 t^n\,\epsilon(t(x - x_0))\,dt\right| \;\le\; \eta(x - x_0)\int_0^1 t^n dt \;\le\; \frac{\eta(x - x_0)}{n+1}\;\;,$$

qui tend vers zéro si x tend vers x_0. On a finalement obtenu une expression de la forme

$$F(x) \ = \ F(x_0) \ + \ P_{n+1}(x) \ + \ (x-x_0)^{n+1} \ \epsilon_1(x-x_0) \ \ ,$$

où $\left|\epsilon_1(x-x_0)\right| \leq \dfrac{\eta(x-x_0)}{n+1}$, qui tend vers zéro lorsque x tend vers x_0. D'où le résultat.

Corollaire 7.2 *Soit f une fonction dérivable sur I, admettant un développement limité d'ordre n en $x_0 \in I$, noté $p_n(x)$. On suppose que f' est continue sur I et admet un développement limité en x_0, d'ordre $n-1$, noté $q_{n-1}(x)$. Alors $p_n'(x) = q_{n-1}(x)$.*

Démonstration : il suffit d'appliquer le résultat précédent à f'.

Applications : A partir du développement de $\dfrac{1}{1+x}$ donné en (6.2), on obtient en intégrant

$$ln(1+x) \ = \ x \ - \ \frac{x^2}{2} \ + \ \frac{x^3}{3} \ + \ ... \ + \ (-1)^n \, \frac{x^n}{n} \ + \ x^n \, \epsilon(x) \ \ .$$

Toujours à partir de (6.2), en changeant x en x^2, on a

$$\frac{1}{1+x^2} \ = \ 1 \ - x^2 \ + \ x^4 \ + \ ... \ + \ (-1)^n \, x^{2n} \ + \ x^{2n+1}\epsilon(x) \ \ ,$$

qu'on intègre pour obtenir

$$Arc \, tg(x) \ = \ x \ - \ \frac{x^3}{3} \ + \ \frac{x^5}{5} \ + \ ... \ + \ (-1)^n \, \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ + \ x^{2n+1}\epsilon(x) \ .$$