SVM 201
Equations différentielles

Alain Yves LE ROUX

1 Un exemple

On considère la question de la pêche industrielle et le risque d'extinction d'une variété de poissons. On note $u(t)$ la quantité de poissons de cette variété à l'instant t, et u_0 cette quantité à un instant de référence $t = 0$ réputé instant initial. Cette population de poissons vit et se développe grâce à une certaine ressource et on note $k(t)$ le taux d'accroissement à l'instant t lié à cette ressource. On note enfin $p(t)$ le taux de prélèvement à l'instant t par l'action des pêcheurs. On écrit un bilan entre deux instants rapprochés t et $t + \Delta t$:

$$u(t+\Delta t) \;=\; u(t) \;+\; k(t)\, u(t)\, \Delta t \;-\; p(t)\, \Delta t \;\; . \tag{1.1}$$

On divise par Δt :

$$\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t} \;=\; k(t)\, u(t) \;-p(t) \;\; ,$$

et on fait tendre Δt vers 0. On obtient l'équation différentielle

$$u'(t) \;=\; k(t)\, u(t) \;-\; p(t)\, . \tag{1.2}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, du premier ordre.
Prenons en considération le cas particulier où les coefficients sont constants, c'est à dire $k(t) = k_0$ constant et $p(t) = p_0$ constant. On suppose ces quantités positives. L'équation devient

$$u'(t) \;=\; k_0\, u(t) \;-\; p_0$$

et la solution vérifiant $u(0) \;=\; u_0$ est la suivante

$$u(t) \;=\; u_0\, e^{k_0 t} \;+\; \frac{p_0}{k_0}\,(1 \;-\; e^{k_0 t})$$

qu'on peut aussi écrire

$$u(t) \;=\; (u_0 \;-\; \frac{p_0}{k_0})\; e^{k_0 t} \;+\; \frac{p_0}{k_0}\; .$$

Cette expression indique que si $p_0 < u_0 k_0$, la population de poissons va croître indéfiniment, et si $p_0 > u_0 k_0$ elle va au contraire disparaitre. On s'aperçoit ainsi que le simple bilan décrit en (1.1) a

Typeset by the TEX-preprocessor PreTEX

conduit à une équation différentielle (1.2) dont la résolution a fourni de plus amples informations sur le système décrit. On se rend compte que la modification de la technique de pêche peut faire disparaitre l'espèce pêchée en fonction seulement de l'état de la population et des ressources au moment de sa mise en place. Si la condition $p_0 < u_0 k_0$ est acquise au départ, la population va continuer à progresser. Par contre si la ressource représentée par k_0 vient à se réduire, la population va se stabiliser, et même disparaitre si k_0 devient négatif (plus de mortalité naturelle que de reproduction). Ceci peut être dû par exemple à une pollution, un problème d'environnement provoquant le développement important d'un prédateur, etc... Inversement ce résultat indique qu'on ne peut pas compter sur la seule action de la pêche pour contrôler à terme la population de poissons.

Dans d'autres domaines, c'est par exemple le cas en lutte "raisonnée" contre les ravageurs en agriculture, on cherchera à réaliser un coefficient $k(t)$ négatif (c'est à dire un taux de mortalité plus fort que le taux de reproduction) et une fonction $p(t)$ active seulement en début d'exercice. Ainsi, dans la lutte contre l'eudémis de la vigne, on rend $k(t) < 0$ en disposant sur les ceps des diffuseurs de phéromone de synthèse, qui perturbent la rencontre des adultes (qui sont des papillons), ce qui réduit fortement la fécondation et donc la génération suivante, et on n'active $p(t)$ qu'en début de saison, par des insecticides, avant la formation des premiers bourgeons, donc bien avant la formation des fruits qui ne seront pas contaminés.

Et, rappelons le, toutes ces informations ne sont issues que d'un simple bilan construits sur des arguments les plus élémentaires. Cet exemple montre que l'outil "équation différentielle" peut être très utile pour évaluer et contrôler l'état d'un système biologique, chimique, écologique, physique, etc...

2 Equations du premier ordre à coefficient constant

Il s'agit du problème suivant :

Chercher une fonction $y = y(t)$ définie pour $t \geq 0$, solution de

$$y'(t) \;=\; k\, y(t) \;+\; f(t) \;\;, \quad y(0) \;=\; y_0 \;, \tag{2.1}$$

où k est une constante réelle, y_0 un réel donné et f une fonction régulière définie pour tout $t \geq 0$.

Nous allons contruire une solution (existence) puis montrer que cette solution est la seule possible (unicité).

2.1 L'existence :

Soit $t > 0$ et $s > 0$ tel que $0 < s < t$. On écrit l'équation au point s, c'est à dire

$$y'(s) \;=\; k\, y(s) \;+\; f(s)$$

et on calcule

$$\frac{d}{ds}\left(y(s)\, e^{-ks}\right) \;=\; e^{-ks}\, y'(s) \;-\; k\, e^{-ks}\, y(s) \;=\; e^{-ks}\, f(s)\;.$$

On intègre cette expression de 0 à t. Il vient

$$e^{-kt}\, y(t) \;-\; y_0 \;=\; \int_0^t e^{-ks}\, f(s)\, ds \;\;,$$

ou encore

$$y(t) \;=\; y_0\, e^{kt} \;+\; \int_0^t \; e^{k(t-s)}\; f(s)\; ds \;\; . \tag{2.2}$$

On vérifie immédiatement que la fonction $y = y(t)$ que l'on vient de construire est solution de (2.1) ; elle vérifie bien l'équation et la condition $y(0) = y_0$. D'où l'existence d'au moins une solution.

2.2 L'unicité

Supposons que l'on dispose de deux solutions y_1 et y_2 (même équation, même condition en $t = 0$). On pose $y = y_1 - y_2$. Alors y vérifie

$$y' \;=\; y_1' - y_2' \;=\; k\, y_1 \;+\; f(t) \;-\; k\, y_2 \;-\; f(t) \;=\; k\, y$$

et

$$y(0) \;=\; y_1(0) \;\; - y_2(0) \;=\; 0\; .$$

On multiplie l'équation $y' - ky = 0$ par e^{-kt} et on en déduit

$$\frac{d}{dt}\, \Big(y(t)\; e^{-kt} \Big) \;\;=\; 0\; .$$

Donc pour tout $t \geq 0$

$$y(t)\; e^{-kt} \;\;=\; Constante\; ,$$

et cette constante est nulle car on en connait la valeur en $t = 0$.
On en déduit que $y_1 \;=\; y_2$, et l'unicité de la solution.

2.3 La positivité

Une question importante en pratique est celle du signe de la quantité $y(t)$ solution de (2.1), qui est donnée par (2.2). On peut l'écrire

$$y(t) \;=\; e^{kt}\, \left(\, y_0 \;+\; \int_0^t \; e^{-ks}\; f(s)\; ds \right) \;\; ,$$

et on remarque que si $y_0 \geq 0$, la solution $y(t)$ reste positive si, pour tout $t \geq 0$,

$$y_0 \;+\; \int_0^t \; e^{-ks}\; f(s)\; ds \;\geq\; 0 \;\; .$$

Par exemple pour $f(t) \;=\; -a \;\; - bt$ avec $a \geq 0,\; b \geq 0$, on obtient la condition

$$y_0 \;-\; \frac{a}{k} \;-\; \frac{b}{k^2} \;\;+\;\; e^{-kt} \left(\frac{a + bt}{k} \;+\; \frac{b}{k^2} \right) \;\;\; \geq\; 0\; .$$

On constate que si $k > 0$ et

$$a \;+\; \frac{b}{k} \;\leq\; k\; y_0 \;\; ,$$

alors la solution croit indéfiniment. Cet exemple correspond au modèle de pêche avec un taux de prélèvement qui augmente linéairement en fonction du temps.

2.4 La notion de semi groupe

Supposons que l'on intègre l'équation (2.1), à partir de la donnée y_0 en $t = 0$, jusqu'à un instant $t_1 > 0$. On note $y_1 = y(t_1)$ et on considère le problème suivant pour $t > t_1$

$$z'(t) \;=\; k\, z(t) \;+\; f(t) \;\;,\;\; z(t_1) = y_1\,. \tag{2.3}$$

qui correspond en fait au problème (2.1) au dela de $t = t_1$. On se pose la question suivante : a-t-on $y(t) = z(t)$ pour $t > t_1$? On s'attend bien entendu à une réponse affirmative, parce que la nature du modèle physique représenté l'exige, mais on se doit de le vérifier : le fait d'arrêter puis de reprendre l'intégration ne modifie pas la solution.

Vérifions le : on a, pour $t \geq t_1$,

$$y(t) \;=\; y_0\, e^{kt} \;+\; \int_0^t \; e^{k(t-s)}\; f(s)\; ds \;\;,$$

et

$$z(t) \;=\; y_1\, e^{k(t-t_1)} \;+\; \int_{t_1}^t \; e^{k(t-s)}\; f(s)\; ds \;\;.$$

En reprenant l'expression de $y_1 = y(t_1)$, on obtient

$$z(t) = e^{k(t-t_1)}\Big(y_0 e^{kt_1} + \int_0^{t_1} \; e^{k(t_1-s)} f(s)\; ds\;\Big) \;+\; \int_{t_1}^t \; e^{k(t-s)}\; f(s)\; ds \;\;.$$

c'est à dire

$$z(t) \;=\; y_0\, e^{kt} \;+\; \int_0^{t_1} \; e^{k(t-s)}\; f(s)\; ds \;+\; \int_{t_1}^t e^{k(t-s)} f(s)\; ds \;=\; y(t)\,.$$

Nous voila rassurés...

Cette propriété qui parait bien naturelle, correspond à la propriété de semi groupe. La fonction f étant fixée, la solution $y(t)$ ne dépend plus que de la donnée y_0, ce qu'on peut noter

$$y(t) \;=\; S(t)\, y_0 \;. \tag{2.4}$$

La quantité $S(t)$ est un opérateur à un paramètre (à savoir t) et on vient de montrer qu'il vérifie la propriété

$$\forall t_1 \geq 0,\; \forall t_2 \geq 0 \quad S(t_1 + t_2) \;=\; S(t_1) \circ S(t_2)$$

pour la loi " $\circ$ " de composition des opérateurs. En particulier on a pour tout $t \geq 0$, $\Delta t > 0$,

$$y(t + \Delta t) \;=\; S(\Delta t)\, y(t)\;. \tag{2.5}$$

La formule de bilan (1.1) correspond effectivement à une approximation de (2.5).

Les techniques de simulation numérique correspondent également à des approximations de (2.5). En notant $t_n = n\Delta t$, n entier, et en notant y_n une approximation de $y(t_n)$, la formule de bilan (1.1) correspond au schéma numérique

$$y_{n+1} \;=\; y_n \;+\; k\; \Delta t\; y_n \;-\; f(t_n)\; \Delta t \;\;.$$

Ce shéma permet de calculer succèssivement toutes les valeurs y_n et obtenir une approximation acceptable de la solution, sans avoir calculé explicitement celle ci.

2.5 Le cas général

On se propose d'étendre ce résultat à l'équation

$$y'(t) \;=\; k(t)\, y(t) \;+\; f(t) \tag{2.6}$$

qui généralise (2.1) au cas où le coéfficient k est une fonction régulière de $t \geq 0$. Les résultats précédents se généralisent de façon très simple, en introduisant la primitive

$$K(t) \;=\; \int_0^t \; k(s)\; ds \;.$$

L'existence s'obtient en multipliant (2.6) par $e^{-K(t)}$, pour obtenir

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-K(t)}y(t)\right) \;=\; e^{-K(t)}f(t) \;\;,$$

d'où, en intégrant de 0 à t, on déduit

$$y(t) \;=\; y_0\, e^{K(t)} \;+\; \int_0^t \; e^{K(t)-K(s)}f(s)\; ds \;. \tag{2.7}$$

Il reste à vérifier que la fonction $y(t)$ définie par (2.7) est bien solution de (2.6) et satisfait à la condition $y(0) = y_0$, ce qui est immédiat.
Pour l'unicité, on introduit comme précédemment deux solutions y_1 et y_2, et on pose $y = y_1 - y_2$, qui est solution de

$$y'(t) \;=\; k(t)\, y(t)\;,\;\; y(0) \;=\; 0\;.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-K(t)}y(t)\right) \;=\; 0 \;\;,$$

et

$$e^{-K(t)}y(t) \;=\; Constante \;=\; y(0) \;=\; 0 \;\;.$$

D'où pour tout t, $y(t) = 0$, et l'unicité.
Les autres remarques sur la positivité et la propriété de semi groupe se généralisent de façon analogue.

2.5.1 Remarque

Une autre généralisation importante correspond au cas où le coefficient k dans (2.1) est un nombre complexe. Tout ce qui a été introduit se généralise de la même façon, la seule difficulté étant peut être d'interpréter la fonction exponentielle complexe. On rappelle que si $k = k_1 + ik_2$, alors

$$e^{kt} \;=\; e^{k_1 t}\;(\; cos(k_2 t) \;+\; i\; sin(k_2 t)\;)\;\;.$$

2.6 Le calcul pratique

Pour calculer la solution de (2.6), on peut évaluer (2.7) bien entendu. Lorsque l'on connait une solution particulière y_p de l'équation (elle ne satisfait pas a priori la condition en $t = 0$), on pose

$$y(t) = y_p(t) + z(t) . \tag{2.8}$$

Alors $z(t)$ est solution de l'équation homogène

$$z'(t) = k(t)\, z(t) . \tag{2.9}$$

Donc $z(t)$ est de la forme

$$z(t) = A\, e^{K(t)} , \tag{2.10}$$

où A est une constante à déterminer en utilisant la condition en $t = 0$. On obtient $A = y_0 - y_p(0)$ (rappelons que $K(0) = 0$).

Lorsqu'on ne dispose pas d'une solution particulière $y_p(t)$, on peut la rechercher sous la forme

$$y_p(t) = A(t)\, e^{K(t)} ; \tag{2.11}$$

en reportant dans l'équation (2.6) on obtient

$$A'(t) = f(t)\, e^{-K(t)}.$$

Il suffit maintenant d'intégrer cette quantité pour obtenir $A(t)$.

Cette méthode est connue sous le nom de "variation de la constante". On retiendra surtout que la solution générale est égale à la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation homogène (2.9) (cf (2.8)). On identifie ensuite avec la condition en $t = 0$ pour fixer la constante A. Notons que l'expression (2.7) correspond effectivement à l'expression (2.8).

3 Les équations du second ordre à coéfficients constants

On considère le problème suivant :

Chercher $y = y(t)$ solution de l'équation différentielle

$$y''(t) = k\, y(t) + b\, y'(t) + f(t) , \tag{3.1}$$

et satisfaisant aux conditions

$$y(0) = y_0 , \quad y'(0) = v_0 . \tag{3.2}$$

Les quantités k, b, y_0 et v_0 sont des constantes et f est une fonction régulière définie pour $t \geq 0$.

3.1 L'existence

On cherche à exploiter ce que l'on a déjà acquis sur l'équation du premier ordre. Considérons d'abord le cas particulier où $k = 0$. Dans ce cas, l'équation se réduit à

$$y''(t) = b\, y'(t) + f(t) ,$$

et il suffit de poser $z(t) = y'(t)$ pour mettre l'équation sous la forme $z' = kz + f(t)$, avec la condition $z(0) = v_0$ en $t = 0$, ce que l'on sait maintenant intégrer. Ensuite, on prend

$$y(t) \ = \ y_0 \ + \ \int_0^t \ z(s) \ ds \ ,$$

et la solution est construite (vérification immédiate).

On suppose maintenant $k \neq 0$.

On va se ramener au premier ordre en posant

$$z \ = \ y' \ - \ \lambda \, y \quad , \tag{3.3}$$

où λ est un paramètre réel ou complexe qui sera déterminé ultérieurement. On va simplement supposer $\lambda \neq 0$ puis on vérifiera qu'en fait le cas $\lambda = 0$ est exclu lorsque $k \neq 0$. On a alors

$$y'' \ = \ z' \ + \ \lambda \, y' \ , \quad y \ = \ -\frac{1}{\lambda} \, (z - y') \ .$$

On introduit ces expressions dans l'équation (3.1) pour obtenir

$$z' \ + \ \lambda \, y' \ = \ - \ \frac{k}{\lambda} \, (z - y') \ + \ b \, y' \ + f(t) \ ,$$

qui peut aussi s'écrire

$$z' \ = \ -\frac{k}{\lambda} \, z \ - \ \frac{y'}{\lambda} \, (\lambda^2 - b\lambda - k) \ + \ f(t) \, . \tag{3.4}$$

On sait que le polynôme $P(\lambda) = \lambda^2 - b\lambda - k$ admet au moins une racine. On choisit λ racine de $P(\lambda)$ de façon à éliminer y' dans (3.4), qui se réduit alors à

$$z' \ = \ -\frac{k}{\lambda} \, z \ + \ f(t) \, . \tag{3.5}$$

Notons que si $k \neq 0$, $\lambda = 0$ ne peut pas être racine de $P(\lambda)$. Le fait que λ et $-\frac{k}{\lambda}$ soient éventuellement des nombres complexes ne pose pas de problème particulier (cf Remarque 2.5.1). On peut enfin remarquer que si λ est racine de $P(\lambda)$, alors $-\frac{k}{\lambda}$ est aussi racine de $P(\lambda)$.
Pour construire une solution de (3.1), (3.2), on utilise la solution z de (3.5) qui vérifie

$$z(0) \ = \ v_0 \ - \ \lambda \, y_0 \ , \tag{3.6}$$

puis on intègre l'équation (3.3), c'est à dire

$$y' \ = \ \lambda \, y \ + \ z(t) \ , \tag{3.7}$$

avec la condition $y(0) = y_0$ en $t = 0$.

On a ainsi succèssivement

$$z(t) \ = \ (v_0 - \lambda y_à) e^{-\frac{k}{\lambda} t} \ + \ \int_0^t \ e^{-\frac{k}{\lambda}(t-s)} \ f(s) \ ds \ , \tag{3.8}$$

puis

$$y(t) \;=\; y_0\, e^{\lambda t} \;+\; \int_0^t \; e^{\lambda(t-s)} \; z(s)\, ds \;. \tag{3.9}$$

Vérifions qu'il s'agit bien de la solution. On dérive (3.7) pour obtenir

$$y'' \;=\; \lambda y' + z' \;=\; ky \;+\; \frac{y'}{\lambda}\,(\lambda^2 - k) \;+\; f(t)\;.$$

Or $\lambda^2 - k = b\lambda$, et on retrouve bien (3.1). Il reste à vérifier les conditions (3.2). En faisant $t = 0$ dans (3.9) on a immédiatement $y(0) = y_0$. En dérivant (3.9) puis en faisant $t = 0$, on obtient

$$y'(0) \;=\; \lambda\, y(0) \;+\; z(0) \;=\; \lambda\, y_0 + v_0 - \lambda\, y_0 \;=\; v_0\,,$$

d'où le résultat d'existence.

3.2 L'unicité

Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (3.1), on pose $y = y_1 - y_2$ qui vérifie

$$y'' \;=\; k\, y \;+\; b\, y' \;\;,\quad y(0) \;=\; 0 \;\;,\;\; y'(0) \;=\; 0\;.$$

On définit ensuite la fonction $z(t)$ comme en (3.3), qui vérifie

$$z' \;=\; -\,\frac{k}{\lambda}\, z \;\;,\;\; z(0) \;=\; 0\;.$$

L'unicité pour les équations du premier ordre implique que pour tout $t > 0$, $z(t) = 0$. Ainsi $y(t)$ est maintenant solution de

$$y' \;-\; \lambda\, y \;=\; 0 \;\;,\quad y(0) \;=\; 0 \;\;,$$

d'où pour tout t, $y(t) = 0$, et l'unicité.

3.3 Les systèmes différentiels

On considère le problème suivant :
Chercher deux fonctions $u(t)$ et $v(t)$ définies pour $t \geq 0$, vérifiant

$$\begin{aligned} u'(t) \;&=\; a\, u(t) \;+\; b\, v(t) \;+\; f(t)\,, \\ v'(t) \;&=\; c\, u(t) \;+\; d\, v(t) \;+\; g(t)\,, \\ u(0) \;&=\; u_0\;, \\ v(0) \;&=\; v_0\;, \end{aligned} \tag{3.10}$$

où a, b, c, d, u_0 et v_0 sont des nombres réels donnés, $f(t)$ et $g(t)$ des fonctions régulières définies pour $t \geq 0$.

Une première méthode consiste à dériver la première équation et éliminer la fonction $v(t)$, pour se ramener à une équation du second ordre. On obtient

$$u'' \;=\; (a+d)\, u' \;+\; (bc - ad)\, u \;+\; b\, g(t) \;+\; f'(t) \;-\; d\, f(t). \tag{3.11}$$

avec les conditions $u(0) = u_0$, $u'(0) = au_0 + bv_0 + f(0)$. On peut alors utiliser les résultats précédents d'existence et d'unicité.

Une autre méthode consiste à poser

$$z(t) \; = \; u'(t) \; - \; \lambda \, u(t) \; , \tag{3.12}$$

avec un paramètre λ réel ou complexe, qui sera déterminé ultérieurement, et calculer $z'(t)$. On obtient

$$z'(t) = u(t)(a^2 + bc) + \; v(t)(ab + bd) \; + \; af(t) + bg(t) + f'(t) \; - \; \lambda(\lambda u(t) + z(t))$$

puis en remarquant que $bv(t) = (\lambda - a)u(t) + z(t) - f(t)$, il vient

$$z'(t) \; = \; (a + d - \lambda) \, z(t) \; - \; (\lambda^2 - (a+d)\lambda - ad + bc) \, u(t) \; + \; F(t) \; ,$$

en posant $F(t) = bg(t) + f'(t) - df(t)$. En choisissant λ racine du polynôme du second degré

$$P(\lambda) \; = \; \lambda^2 \; - \; (a + d)\lambda \; - \; ad \; + \; bc \; \; , \tag{3.13}$$

on élimine $u(t)$ de l'expression précédente, qui se réduit à

$$z'(t) \; = \; (a + d - \lambda) \, z(t) \; + \; F(t) \; . \tag{3.14}$$

On peut maintenant résoudre le problème en deux temps ; dans un premier temps, on calcule la solution $z(t)$ de (3.14) avec la condition $z(0) = (a - \lambda)u_0 + bv_0 + f(0)$ et dans un deuxieme temps, on intègre (3.12) avec la condition $u(0) = u_0$.

Il reste à vérifier que l'on a effectivement résolu (3.10). On distingue deux cas, le cas $b \neq 0$ et le cas $b = 0$.

Pour $b \neq 0$, on définit la fonction $v(t)$ par

$$v(t) \; = \; \frac{1}{b} \, (u'(t) \; - \; a \, u(t) \; - \; f(t)) \; .$$

Ainsi, la première équation de (3.10) est satisfaite. On calcule ensuite $b(v' - dv)$ de façon à montrer que $v(t)$ vérifie bien la seconde équation de (3.10). On a

$$b(v' - dv) \; = \; u'' - au' - f' \; - \; d(u' - au - f) \; .$$

Or $u' = \lambda u + z$ (donc $u'' = \lambda u' + z'$) et $z' = (a + d - \lambda)z + F$. On obtient donc

$$b(v' - dv) \; = \; (\lambda - a - d)(\lambda u + z) \; + \; (a + d - \lambda)z \; + \; ad \, u \; + \; F + df - f' \; ,$$

ou encore, sachant que $F = bg + f' - df$,

$$b(v' - dv) = \; (\lambda^2 - (a + d)\lambda) \, u \; + ad \, u \; + bg$$

et comme $\lambda^2 - (a + d)\lambda = bc - ad$, il reste finalement

$$b(v' - dv) \; = \; (bc - ad) \, u \; + ad \, u \; + bg \; = \; b(cu + g) \; ,$$

qui est bien la seconde équation de (3.10). Il reste à vérifier que les conditions en $t = 0$ sont satisfaites. On a déjà $u(0) = u_0$ et de plus, par construction de $v(t)$,

$$v(0) = \frac{1}{b}\left(\lambda u_0 + z_0 - a u_0 - f(0)\right) = \frac{1}{b}\left(\lambda u_0 + a u_0 + b v_0 + f(0) - a u_0 - f(0)\right) = v_0 .$$

Pour $b = 0$, on a deux choix possibles de λ : $\lambda = a$ ou $\lambda = d$. Pour le choix $\lambda = a$, on remarque que nécessairement $z(t) = f(t)$ et on obtient $v(t)$ en résolvant l'équation du premier ordre (où $u(t)$ est connue)

$$v'(t) = dv(t) + (cu(t) + g(t)) , \quad v(0) = v_0 , \tag{3.15}$$

et qui admet une solution unique. Pour l'autre choix $\lambda = d$, on a une situation analogue où on dispose aussi de $u(t)$; on résoud ici aussi (3.15) pour obtenir $v(t)$.

3.4 Calcul de la solution en pratique

Dans le cas de l'équation du second ordre (3.1), (3.2), on a $z(t)$ de la forme

$$z(t) = (v_0 - \lambda y_0)\, e^{-\frac{k}{\lambda}} + \varphi(t) , \quad avec\, \varphi(t) = \int_0^t e^{-\frac{k}{\lambda}(t-s)} f(s)\, ds ,$$

donc

$$y(t) = y_0\, e^{\lambda t} + (v_0 - \lambda y_0)\, e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\frac{k+\lambda^2}{\lambda}} ds + \Phi(t) \tag{3.16}$$

où

$$\Phi(t) = e^{\lambda t} \int_O^t e^{-\lambda \tau}\, \varphi(\tau)\, d\tau . \tag{3.17}$$

On distingue deux cas, suivant que $k + \lambda^2$ est nul ou non.
Si $k + \lambda^2 \neq 0$, on a

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{\lambda(v_0 - \lambda y_0)}{k + \lambda^2}\right) e^{\lambda t} + \frac{(\lambda y_0 - v_0)\lambda}{k + \lambda^2}\, e^{-\frac{k}{\lambda}} + \Phi(t) \tag{3.18}$$

qui est de la forme

$$y(t) = A\, e^{\lambda_1 t} + B\, e^{\lambda_2 t} + \Phi(t) , \tag{3.19}$$

où λ_1 et λ_2 sont les deux racines (distinctes) de $P(\lambda) = \lambda^2 - b\lambda - k$, appelé le polynôme caractéristique associé à (3.1).
Si $k + \lambda^2 = 0$, le polynôme $P(\lambda)$ admet une racine double, et on a

$$\int_0^t e^{-\frac{k+\lambda^2}{\lambda} s}\, ds = \int_0^t 1\, ds = t ,$$

et la solution est de la forme

$$y(t) = (A + Bt)\, e^{\lambda t} + \Phi(t) . \tag{3.20}$$

Dans le cas du système (3.10), les racines correspondent à λ et $a + d - \lambda$. On retrouve la forme (3.19) pour $u(t)$ si ces racines sont distinctes et (3.20) s'il s'agit d'une racine double.

Pour la résolution de (3.1), (3.2) on peut donc procéder ainsi :

1 ° - Calculer les racines du polynôme caractéristique $P(\lambda)$.

2 ° - Construire une solution particulière $\Phi(t)$.

3 ° - Calculer les valeurs de A et B en utilisant les conditions en $t = 0$: dans le cas de racines doubles, résoudre le système linéaire :

$$\begin{aligned} A \;+\; B \;&=\; y_0 \;-\; \Phi(0) \\ \lambda_1 A \;+\; \lambda_2 B \;&=\; v_0 \;-\; \Phi'(0) \end{aligned}$$

et dans le cas d'une racine simple, prendre :

$$\begin{aligned} A \;&=\; y_0 - \Phi(0) \quad , \\ B \;&=\; v_0 - \Phi'(0) - \lambda A. \end{aligned}$$

Le calcul de la solution particulière $\Phi(t)$ peut être facilité si on tient compte de (3.17). On écrit que $\Phi(t)$ est de la forme

$$\Phi(t) \;=\; A(t)\, e^{\lambda t}$$

que l'on injecte dans l'équation. Comme

$$\Phi'' - k\Phi - b\Phi' \;=\; P(\lambda)\; \Phi \;+\; e^{\lambda t}\,(A'' + (2\lambda - b)A)\;,$$

et sachant que λ est racine de $P(\lambda)$, il vient

$$A" \;=\; (b - 2\lambda)A' \;+\; e^{-\lambda t}\, f(t)\;.$$

Il s'agit d'une équation du premier ordre en A', d'où le choix possible

$$A'(t) \;=\; e^{(b-2\lambda)t} \int_0^t \; e^{-(b-\lambda)s}\, f(s)ds\;,$$

et il reste à intégrer pour avoir $A(t)$ et ensuite $\Phi(t)$.

Cette technique est connue sous le nom de la "méthode de variation de la constante".

Dans le cas du système on peut procèder de façon analogue pour obtenir la fonction $u(t)$ qui est aussi solution d'une équation différentielle du second degré. Elle est donc aussi de la forme (3.19), (3.20), suivant que les racines de $P(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$ sont simples ou doubles. Le calcul d'une solution particulière peut cependant être plus difficile, par la méthode de variation de la constante. La technique directe, qui reprend point à point la construction précédente, par l'introduction de la variable $z(t)$ est bien souvent la plus rapide, compte tenu de la méthode de calcul pratique déjà proposée en section 2.6 pour le premier ordre.